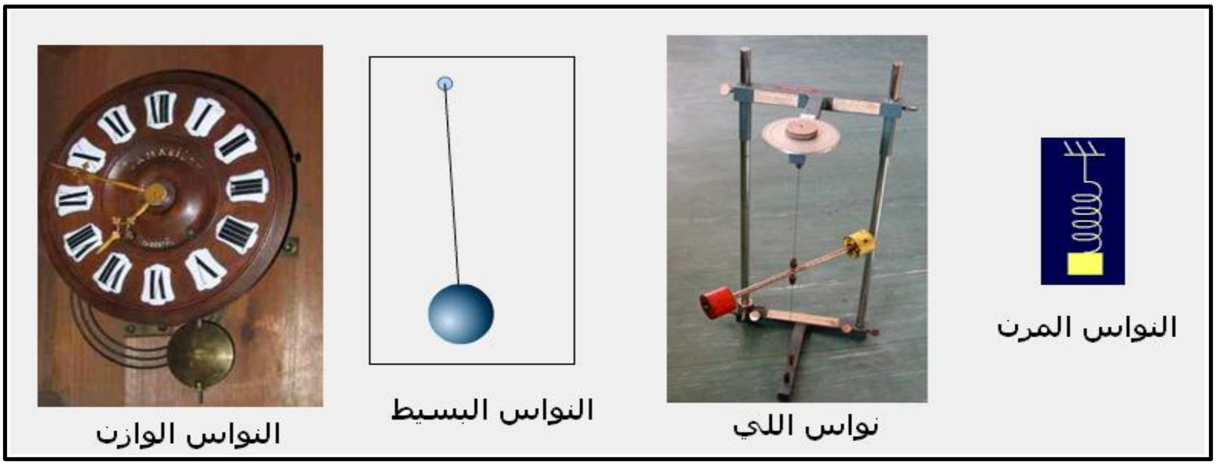
المتذبذبات الميكانيكية

تقديم مجموعات ميكانيكية متذبذبة



1 ــ تعريف بالمجموعة الميكانيكية المتذبذبة

المجموعة الميكانيكية هي مجموعة تنجز حركة دورية حول موضع توازنها المستقر .

الحركة الدورية : هي حركة تتكرر مماثلة لنفسها خلال مدد زمنية متساوية .

2 ــ الحركة التذبذبية ومميزاتها .

2 ــ 1 تعريف

الحركة التذبذبية هي حركة ذهاب وإياب حول موضع معين ، وهي حركة تميز المتذبذبات الميكانيكية .

هناك ثلاثة أنواع للحركة التذبذبية :

- الحركة التذبذبية الحرة : هي التي ينجزها متذبذب ميكانيكي دون اكتساب طاقة ما من المحيط الخارجي بعد إحداث حركته .
- الحركة التذبذبية المصانة : هي التي ينجزها المتذبذب وذلك بتعويض الطاقة المفقودة خلال التذبذبات بواسطة جهاز خارجي . مثال الساعة الحائطية .
- الحركة التذبية القسرية : عندما تفرض مجموعة ميكانيكة تسمى بالمثير تردد لذبذبات على المجموعة المتذبذبة والتي تسمى بالرنان .

2 ــ 2 مميزات الحركة التذبذبية

أ ــ موضع التوازن المستقر

كل متذبذب ميكانيكي حر لا يمكنه أن ينجز حركته التذبذبية إلا حول موضع توازنه المستقر .

ب ــ وسع الحركة

وسع الحركة لمتذبذب ميكانيكي حر و غير مخمد هو القيمة القصوى الموجبة التي يأخذها المقدار الذي يعبر عن مدى ابتعاد أو انحراف المتذبذب عن موضع توازنه المستقر .

بالنسبة للنواس الوازن والنواس البسيط ونواس اللي نستعمل الأفصول الزاوي θ .

بالنسبة للنواس المرن ، نستعمل الأفصول x (حركة إزاحة مستقيمية) .

3 ـ النواس المرن

3 ـ 1 تعريف

النواس المرن مجموعة ميكانيكية متذبذبة تتكون من جسم صلب مرتبط بأحد طرفي نابض صلابته k ذي لفات غير متصلة وكتلته مهملة ، ثبت طرفه الآخر بحامل .

k ثابتة تتعلق بشكل النابض وبطبيعته

عند إزاحة الجسم عن موضع توازنه المستقر وفق اتجاه محور النابض وتحريره ، فإنه ينجز حركة تذبذبية حرة حول هذا الموضع . نمعلم مواضع مركز قصور النواس المرن في معلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد وممنظم محوره $(O,\vec{i})$ أفقي بالأفصول $x(t)$

بحيث أن : $\overrightarrow{G_{éq}G} = x(t)\vec{i}$. $G_{éq}$ موضع G عند التوازن المستقر .

أثناء الحركة الحرة وغير المخمدة للنواس ، تأخذ x قيما موجبة أكبرها x_m وقيما سالبة أصغرها $-x_m$ ، نسمي x_m وسع الحركة للنواس المرن .

3 ـ 2 دراسة ذبذبات المجموعة { جسم صلب ـ نابض }

أ ـ قوة الارتداد المطبقة من طرف نايض على الجسم

عند إزاحة الجسم عن موضع توازنه وتحريره ، تنجز المجموعة حركة تذبذبية تحت تأثير مجموعة من القوى :

$\vec{P}$: وزن الجسم

$\vec{R}$: تأثير السطح على الجسم (غياب الاحتكاك $\vec{R}$ عمودية على السطح) ،

$\vec{F}$: القوة المطبقة من طرف النابض على الجسم وهي **قوة ارتداد** تسعى إلى إرجاع الجسم إلى موضعه البدئي .

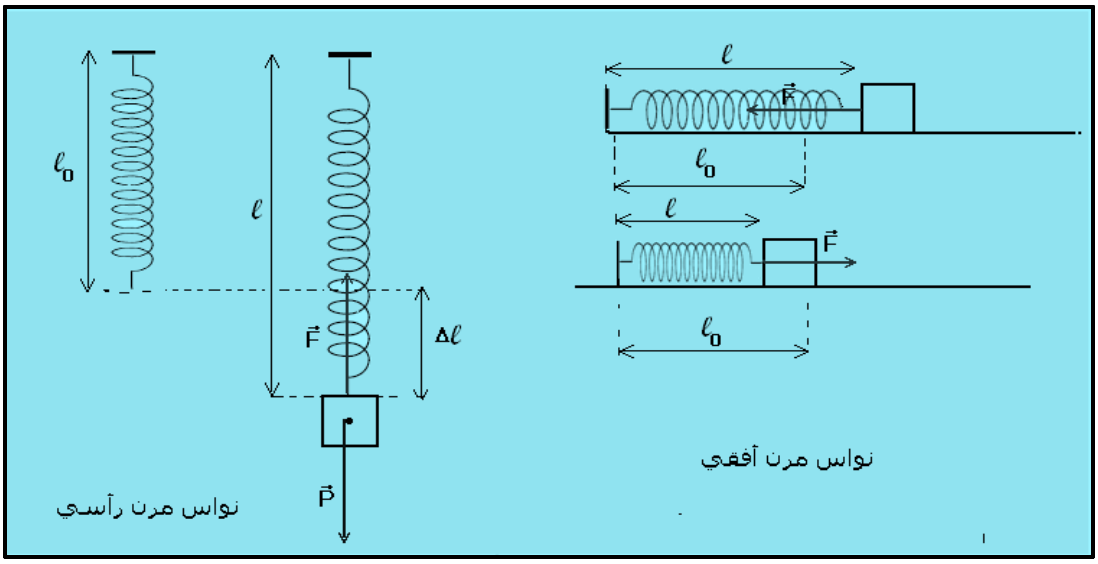
ب ـ مميزات قوة الارتداد

نقطة التأثير : نقطة التماس الجسم والنابض .

خط التأثير : محور النابض

المنحى : موجه نحو داخل النابض في حالة النابض مطالا ، أو خارجه في حالة النابض مكبوس أو مضغوط

الشدة : $F = k\Delta\ell = k(\ell-\ell_0)$ حيث k صلابة النابض و $\Delta\ell$ إطالته بالمتر و ℓ_0 طوله البدئي ، ℓ طوله النهائي .



3 ـ 3 المعادلة التفاضلية

المعادلة التفاضلية للنواس المرن : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$.

حل المعادلة التفاضلية :

معادلة تفاضلية خطية حلها بصفة عامة يكتب على الشكل التالي : $x(t) = x_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ حيث :

$(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$: طور التذبذبات عند اللحظة t وحدته rad .

φ طور الذبذبات عند اللحظة t=0 نعبر عنه ب rad .

x_m وسع الحركة بالمتر (m)

T_0 الدور الخاص للذبذبات ب s

ـ تعبير الدور الخاص : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

m كتلة الجسم (S) ب kg و k صلابة النابض ب (N/m)

نعبر كذلك عن التردد الخاص للذبذبات بالعلاقة التالية : $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

وحدة التردد في النظام العالمي للوحدات هي الهرتز . (Hz)

3 ـ 4 خمود الذبذبات الميكانيكية

أ ـ ظاهرة الخمود

عند إزاحة متذبذب ميكانيكي (النواس المرن) عن موضع توازنه المستقر وتحريره ، فإنه ينجز ذبذبات حرة يتناقص وسعها تدريجيا مع الزمن ، إلى أن يتوقف عند موضع توازنه المستقر ، تسمى هذه الظاهرة : **بالخمود الميكانيكي** .

تعزى هذه الظاهرة إلى الاحتكاكات والتي يمكن تصنيفه إلى نوعين :

ـ احتكاكات صلبة والتي ينتج عنها خمود صلب للذبذبات .

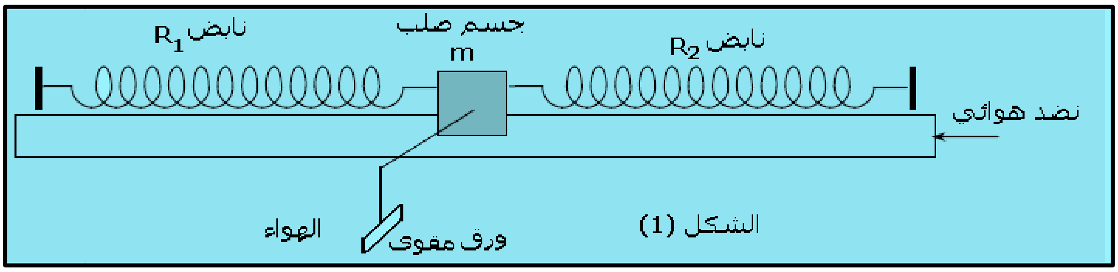
ـ احتكاكات مائعة والتي ينتج عنها خمود مائع للذبذبات .

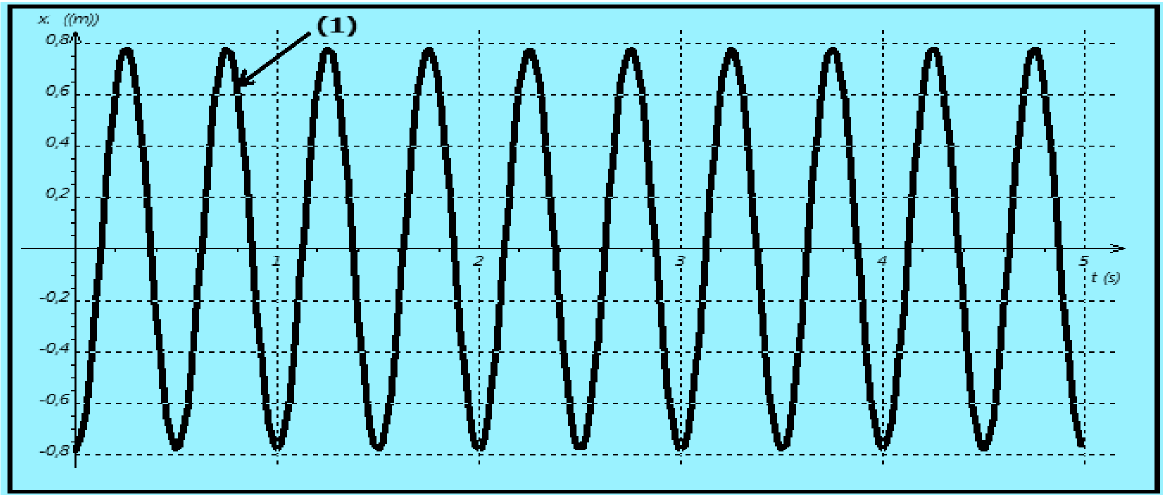
ب ـ أنظمة خمود الذبذبات الميكانيكية .

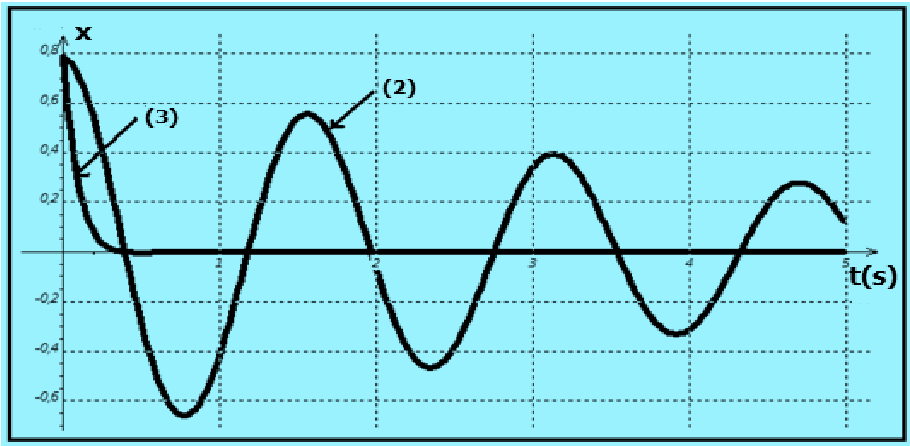
الخمود بالاحتكاكات المائعة :

نشغل المعصفة ونزيح الخيال عن موضع توازنه ، ثم نحرره بدون سرعة بدئية . فنحصل على المنحنى (1)

نثبت على الخيال قطعة من الورق المقوى ونعيد نفس التجربة فنحصل على المنحنى (2) مساحة الورق المقوى S_1 و منحنى (3) مساحة الورق المقوى S_2 بحيث أن $S_2 > S_3$.







ـ حالة الخمود الضعيف : النظام شبه الدوري .

في هذه الحالة ينجز المتذبذب الميكانيكي ذبذبات يتناقص وسعها تدريجيا إلى أن يستقر المتذبذب عند موضع توازنه المستقر .

كما أنه في هذه الحالة أن حركة المتذبذب ليست دورية نقول إنها شبه دورية ودورها T يقارب الدور الخاص T_0 للمتذبذب .

عموما $(T_0 < T)$. نسمي T شبه الدور .

شبه الدور بالنسبة لمتذبذب ميكانيكي خموده ضعيف هو المدة الزمنية T التي تفصل مرورين متتاليين للمتذبذب من موضع توازنه المستقر في نفس المنحى .

ملحوظة : كلما كان خمود المتذبذب ضعيفا ، كلما تناهى شبه الدور T نحو الدور الخاص T_0 .

ـ يكون الخمود مهما ، كلما تناقص وسع الحركة بشدة إلى أن ينعدم خلال فترة زمنية وجيزة .

ب ــ حالة الخمود الحاد : النظام اللادوري .

في هذه الحالة تكون حركة المتذبذب غير دورية ، نقول أنها لا دورية ، وحسب أهمية الخمود ، نحصل على الحالات التالية :

ـ النظام تحت الحرج : ينجز المتذبذب ذبذبة واحدة قبل أن يتوقف .

ـ النظام الحرج : حيث يعود المتذبذب إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب .

ـ النظام فوق الحرج : حيث يستغرق المتذبذب وقتا طويلا لكي يرجع إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب .

ملحوظة : لصيانة حركة تذبذبية نوظف بعض الأجهزة الميكانيكية تكمن وظيفتها في تعويض الطاقة المبددة في كل دور .

3 ـ 5 ـ ظاهرة الرنين الميكانيكي

تعريف الذبذبات القسرية

تنجز مجموعة ميكانيكية ذبذبات قسرية عندما يفرض مثير دوره على هذه المجموعة التي تسمى بالرنان
يتذبذب الرنان بنفس الدور T للمثير

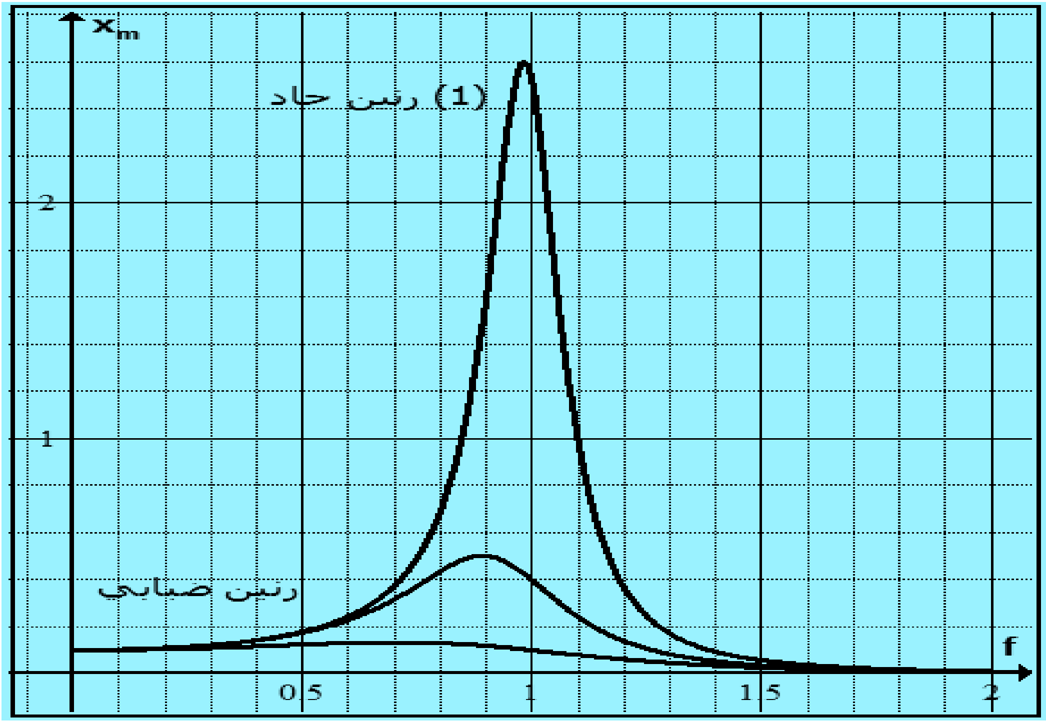
ظاهرة الرنين الميكانيكي :

عند الرنين :

- وسع تذبذبات الرنان يكون قصويا
- دور المثير ودور الرنان يكونا متقاربين جدا .

تأثير الخمود على الرنين :

- ✓ في حالة الخمود الضعيف للرنان ، يأخذ وسع الذبذبات القسرية عند الرنين قيمة كبيرة ، نقول أن الرنين حادا .
- ✓ في حالة الخمود القوي للرنان ، يأخذ وسع الذبذبات القسرية عند الرنين قيمة صغير ، نقول إن الرنين ضبابي
- ✓ تناقص وسع الذبذات القسرية مع تزايد خمود ذبذبات الرنان



4) نواس اللَّي :

4 ـ 1 ــ مزدوجة الارتداد المطبقة من طرف سلك اللي .

عند تطبيق مزدوجة قوتين على قضيب معلق بسلك ، فإن هذا الأخير يلتوي . وعند حذف المزدوجتين ، يعود السلك إلى موضع توازنه بفعل قوة الارتداد التي تطبقها مولدات السلك على القضيب ومجموع هذه القوى يكون مزدوجة تسمى بمزدوجة اللي ونرمز لها ب $\mathcal{M}_C$.

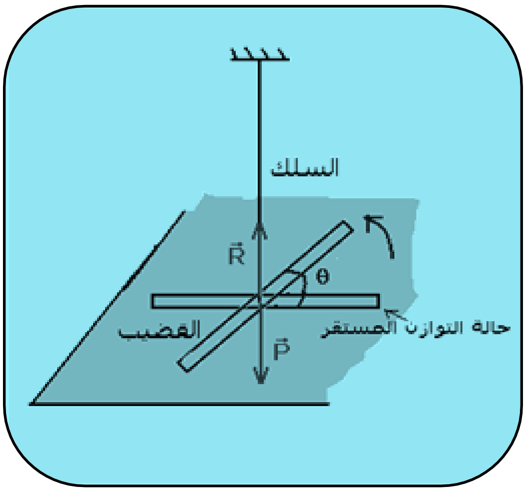
عزم هذه المزدوجة مستقل عن المحور ونعبر عنه بالعلاقة التالية : $\mathcal{M}_C = -C.\theta$

بحيث أن C ثابتة لي السلك وحدتها هي $N.m.rad^{-1}$ و θ زاوية اللي ب rad

تتعلق ثابتة اللي بطول السلك وبمقطعه وبنوعيته .

4 ـ 2 ــ المعادلة التفاضلية لحركة الجسم الصلب وحلها .

نعتبر نواس اللي في توازنه المستقر . ندير القضيب عن موضع توازنه بالزاوية θ_m ، ونحرره بدون سرعة بدئية ، فينجز القضيب حركة تذبذبية حرة حول موضع توازنه المستقر .



نعتبر الاحتكاكات مهملة . J_Δ عزم قصور القصيب بالنسبة للمحور (Δ) المجسد بالسلك . و C ثابتة اللي للسلك.

ندرس حركة القضيب في مرجع مرتبط بالأرض والذي نعتبره مرجعا غاليليا ، ونمعلم موضع القضيب بأفصوله الزاوي θ والذي نقيسه بالنسبة لاتجاه مرجعي وهو اتجاه القضيب عند التوازن .

تكون المعادلة التفاضلية لحركة القضيب هي : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$

حل المعادلة التفاضلية يكون على الشكل التالي : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

θ_m و φ تتعلقان بالشروط البدئية للحركة .

4 ـ 3 ــ الدور الخاص :

الدور الخاص لنواس اللي الحر هو كالتالي :

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$ حيث J_Δ عزم قصور القضيب (الجسم الصلب) بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه $kg.m^2$ و C ثابتة اللي للسلك نعبر عنها $N.m.rad^{-1}$.

التردد الخاص لنواس اللي هو : $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

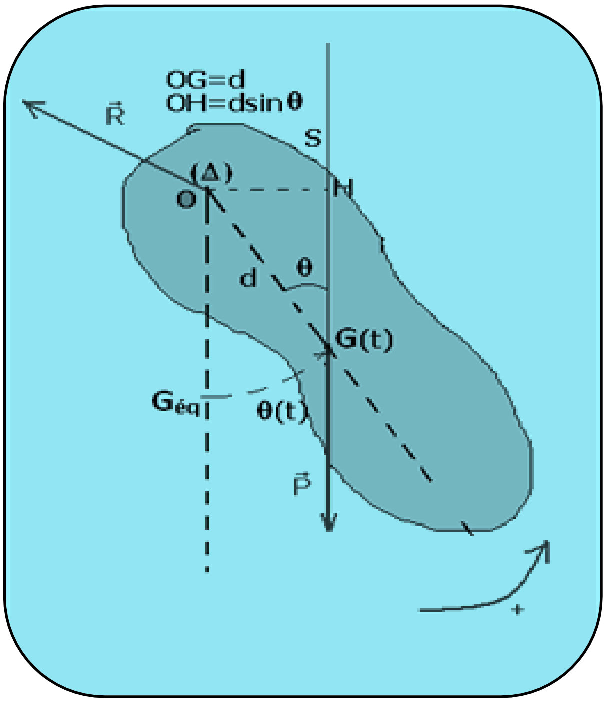
5) النواس الوازن :

5 ـ 1 ـ المعادلة التفاضلية لحركة النواس الوازن وحلها .

المجموعة المدروسة : الجسم (S) كتلته m وعزم قصوره بالنسبة لمحور الدوران Δ الأفقي J_Δ .

المعلم : مرتبط بالأرض والذي نعتبره مرجعا غاليليا .

في كل لحظة نمعلم موضع النواس G بالأفصول الزاوي $\theta(t)$



جرد القوى المطبقة على المجموعة :

ـ وزنها $\vec{P}$

ـ تأثير المحور Δ على المجموعة $\vec{R}$.

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المجموعة في حالة الدوران حول المحور Δ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})=J_\Delta.\ddot{\theta}$

بما أن خط تأثير القوة $\vec{R}$ يتقاطع مع محور الدوران Δ فإن عزمها منعدم بالنسبة لهذا المحور : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})=0$

وبالتالي : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=J_\Delta.\ddot{\theta}$

لدينا : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=-mgd\sin\theta$ أي أن $-mgd\sin\theta=J_\Delta.\ddot{\theta}\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{mgd}{J_\Delta}\sin\theta=0 \quad (1)$

العلاقة التي تم التوصل إليها هي المعادلة التفاضلية لحركة النواس الوازن وهي غير خطية وبالتالي فحلها ليس جيبيا .

أ ـ حالة الذبذبات ذات وسع صغير .

تعتبر الذبذبات ذات وسع صغير إذا كانت $\theta\le 15°$ يعني أن $\theta\le 0,26rad$ في هذه الحالة تكون $\sin\theta\approx\theta$ و تصبح المعادلة التفاضلية

$$\ddot{\theta}+\frac{mgd}{J_\Delta}\theta=0 \qquad (2)$$

قياسا مع ما سبق حل هذه المعادلة التفاضلية هو على الشكل التالي :

$$\theta(t)=\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

ب ـ الدور الخاص لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة وغير مخمدة وذات وسع صغير .

الدور الخاص لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة وغير مخمدة وذات وسع صغير:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

J_Δ عزم قصور الجسم بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه ب $(kg.m^2)$

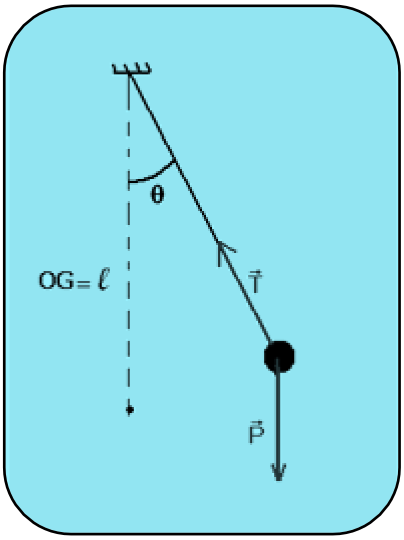
d المسافة الفاصلة بين المحور Δ و مركز قصور المجموعة المتذبذبة . ب (m)

m كتلة المجموعة ونعبر عنها ب (kg)

g شدة الثقالة (m/s^2) .

تعبير التردد الخاص f_0 لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة غير مخمدة و ذات وسع صغير : $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$

5 ـ 2 ـ النواس البسيط



النواس البسيط هو نموذج مثالي للمتذبذب ميكانيكي .

وهو حالة خاصة للنواس الوازن حيث :

$d = \ell$ و $J_\Delta = m\ell^2$ في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية

على الشكل التالي : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

وتقبل هذه المعادلة كحلا لها : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

وتمثل المعادلة الزمنية لحركة النواس البسيط .

تعبير الدور الخاص للنواس البسيط : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

حيث ℓ طول النواس البسيط ب m و g شدة مجال الثقالة (m/s^2) .

طول النواس البسيط المتواقت مع النواس البسيط :

نقول أن النواس البسيط متواقت مع النواس الوازن إذا كان لهما نفس الدور

أي أن دور النواس البسيط = دور النواس الوازن .

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}} \Rightarrow \ell = \frac{J_\Delta}{md}$$