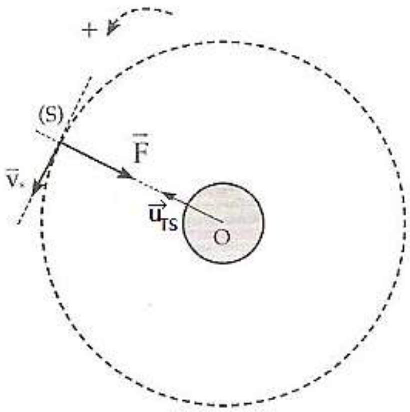
التصحيح

تمرين 1

1-تمثيل متجهة السرعة $\vec{V}_S$ للقمر الإصطناعي (S) و متجهة $\vec{F}$ قوة التجاذب الكوني



اتجاه القوة $\vec{F}$ هو اتجاه المتجهة الواحدية $\vec{u}_{TS}$ ومنحاها معاكس لمنحى $\vec{u}_{TS}$.

اتجاه $\vec{V}_S$ عمودي على اتجاه $\vec{F}$ ومنحاها هو منحى الحركة .

2-التعبير المتجهي لقوة التجاذب الكوني التي تطبقها الأرض

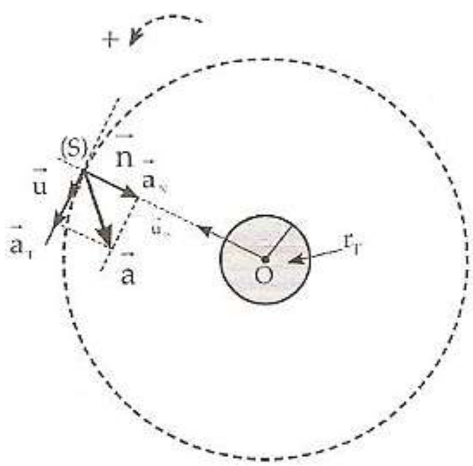
$$\vec{F} = -G.\frac{M_T.m}{(r_T+h)^2}.\vec{u}_{TS}$$

حيث M_T : كتلة الأرض و m_S : كتلة القمر الإصطناعي .

3-تعبير متجهة التسارع لحركة (S) في اساس فريني

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \Rightarrow \vec{a} = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$$

مع : $a_T = \frac{dv}{dt}$ التسارع المماسي و $a_N = \frac{V^2}{R}$ التسارع المنظمي



4.1-إثبات انتظام الحركة

تطبيق القانون الثاني لنيوتن على (S) لدينا : $\vec{F} = m.\vec{a}$ أي : $m.\vec{a} =$ $-G.\frac{M_T.m_S}{(r_T+h)^2}.\vec{u}_{TS}$

نستنتج التسارع : $\vec{a} = -G.\frac{M_T}{(r_T+h)^2}.\vec{u}_{TS}$

في معلم فريني $(S,\vec{u}\ ,\vec{n}\ )$ متجهة التسارع تكتب : $\vec{a} = G.\frac{M_T}{(r_T+h)^2}.\vec{n}$

حيث $\vec{n} = -\vec{u}_{TS}$

إذن : $a_T = 0$

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

يعني ان السرعة ثابتة $(V = cte)$ وحركة S منتظمة .

4.2-تعبير V_S

باعتبار التسارع منظميا ، فإن : $a = a_N$

$$\frac{V_S^2}{r_T+h} = \frac{G.M_T}{(r_T+h)^2}$$

$$V_S^2 = \frac{G.M_T}{r_T + h}$$

$$V_S = \sqrt{\frac{G.M_T}{r_T + h}}$$

لنعبر عن الجداء $G.M_T$ بدلالة V_S :

باعتبار الثقالة ناتجة فقط عن التجاذب ، فإن وزن القمر الإصطناعي يساوي قوة التجاذب المطبقة عليه : $P = F$

$$\mathrm{m.g} = \mathrm{G}.\frac{M_T.m}{(r_T + h)^2} \Longrightarrow g = G.\frac{M_T}{(r_T + h)^2}$$

عند سطح الأرض حيث $h = 0$:

$$g_0 = \frac{G.M_T}{{r_T}^2} \Longrightarrow G.M_T = g_0.{r_T}^2$$

نعوض في تعبير السرعة نحصل على :

$$V_S = \sqrt{\frac{g_0.{r_T}^2}{r_T + h}} \Longrightarrow V_S = r_T\sqrt{\frac{g_0}{r_T + h}}$$

ت.ع :

$$V_S = 6350 \times 10^3 \times \sqrt{\frac{9{,}8}{6350 \times 10^3 + 1000 \times 10^3}} \Longrightarrow V_S = 7332{,}35\ m.s^{-1}$$

5-كتلة الأرض

باستعمال العلاقة : $G.M_T = g_0.{r_T}^2$ نحصل على : $M_T = \frac{g_0.{r_T}^2}{G}$

ت.ع :

$$M_T = \frac{9{,}8 \times (6350 \times 10^3)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} = 5{,}92.10^{24}\ kg$$

6-إثبات ان القمر الإصطناعي لا يبدو ساكنا :

في يوم واحد ينجز القمر الإصطناعي 14 دورة حول الأرض ، التي تنجز فقط دورة واحدة أي أن : $T \approx 14T_S$. ($T \neq T_S$)

هذا يعني أن دوري حركتهما مختلفتان وبالتالي لا يبدو S ساكنا بالنسبة لملاحظ أرضي .

7.1-إثبات العلاقة : $\omega^2.(r_T + z)^3 = cte$

تعبير سرعة القمر S' هي : $V_{S'} = \sqrt{\frac{G.M_T}{r_T+z}}$

ونعبر عنها أيضا بالعلاقة : $V_{S'} = (r_T + z)\omega$ أي : $\sqrt{\frac{G.M_T}{r_T+z}} = (r_T + z)\omega$

$$\frac{G.M_T}{r_T + z} = (r_T + z)^2.\omega^2$$

$$(r_T + z)^3.\omega^2 = G.M_T$$

$$\omega^2.(r_T + z)^3 = cte$$

7.2-قيمة الإرتفاع z

باستعمال العلاقة :

$$\omega^2.(r_T+z)^3 = G.M_T$$

نستنتج : $(r_T+z)^3 = \frac{G.M_T}{\omega^2} \Longrightarrow r_T+z = \sqrt[3]{\frac{G.M_T}{\omega^2}} \Longrightarrow r_T = \sqrt[3]{\frac{G.M_T}{\omega^2}} - z$ و

بما أن القمر الإصطناعي ساكن بالنسبة للأرض ، فإن سرعته الزاوية تساوي السرعة الزاوية للأرض ومنه : $T = T'$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

نعوض في العلاقة السابقة :

$$\boldsymbol{z = \sqrt[3]{\frac{G.M_T.T^2}{4\pi^2}} - r_T \Longrightarrow z = \sqrt[3]{\frac{g_0.{r_T}^2.T^2}{4\pi^2}} - r_T}$$

ت.ع :

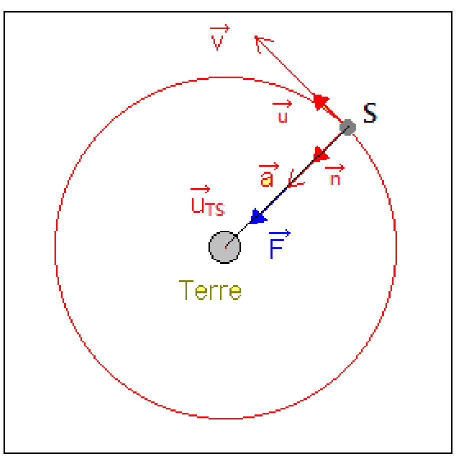
$$z = \sqrt[3]{\frac{9{,}8\times(6350\times10^3)^2\times84164^2}{4\pi^2}} - 6350\times10^3$$

$$\boldsymbol{z = 3{,}50.10^7\ m = 35\ 000\ km}$$

تمرين 2 :

1- شروط التي يجب أن تتوفر لكي يكون قمرا اصطناعيا ساكنا بالنسبة للأرض

- ✓ ينبغي أن يقع مداره في مستوى خط الإستواء
- ✓ أن يدور في نفس منحى دوران الارض حول محورها القطبي
- ✓ أن يكون دوره المداري مساويا لدور حركة الدوران للأرض



2-إثبات تعبير متجهة التسارع

يخضع القمر الإصطناعي (S) لقوة التجاذب المطبقة عليه من طرف الأرض تعبيرها :

$$\vec{F} = -G.\frac{m_T.m}{r_0^2}.\vec{u}_{TS}$$

في معلم فريني : $\vec{F} = G.\frac{m_T.m}{r_0^2}.\vec{n}$ حيث : $\vec{n} = -\vec{u}_{TS}$ و m كتلة القمر الإصطناعي .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القمر الإصطناعي في المعلم المركزي الأرضي نكتب :

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

$$m.\vec{a} = G.\frac{m_T.m}{r_0^2}.\vec{n} \Longrightarrow \boldsymbol{\vec{a} = \frac{G.m_T}{r_0^2}.\vec{n}}$$

3-إثبات انتظام حركة القمر و تعبير سرعته

حسب السؤال 2- متجهة التسارع منظمية إذن : $a_T = 0$ أي: $\frac{dV}{dt} = 0$

يعني أن $V = cte$ أي أن حركة القمر الإصطناعي منتظمة في المعلم المركزي الأرضي.

باعتبار التسارع منظميا ، فإن : $a = a_N$ مع : $a_N = \frac{V^2}{r_0}$

$$\frac{G.m_T}{r_0^2} = \frac{V^2}{r_0} \Rightarrow \boldsymbol{V = \sqrt{\frac{G.m_T}{r_0}}}$$

4-تعريف وتعبير الدور المداري T للقمر الإصطناعي

تعريفه: يساوي المدة التي يستغرقها القمر الإصطناعي لإنجاز دورة واحدة حول الأرض .

تعبيره : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ مع ω السرعة الزاوية

نعلم أن : $V = r_0.\omega$ أي: $\omega = \frac{V}{r_0}$

تعبير T يصبح : $T = \frac{2\pi r_0}{V}$ أي: $\boldsymbol{T = 2\pi r_0.\sqrt{\frac{r_0}{G.m_T}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{G.m_T}}}$

5- تعبير الثابتة $\boldsymbol{K}$ بدلالة $\boldsymbol{G}$ و $\boldsymbol{m_T}$

من خلال العلاقة السابقة :

$$T^2 = 4\pi^2\frac{r_0^3}{G.m_T} \Rightarrow \frac{T^2}{{r_0}^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_T}$$

تعبير الثابتة K هو : $\boldsymbol{K = \frac{4\pi^2}{G.m_T}}$

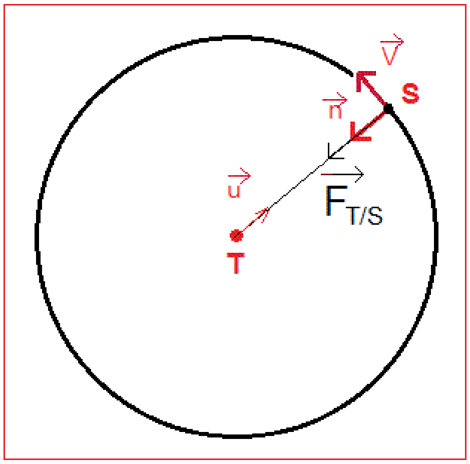
6- تعبير النسبة $\boldsymbol{\frac{m_S}{m_T}}$ بدلالة $\boldsymbol{r_T}$ و $\boldsymbol{r_0}$ و $\boldsymbol{T_T}$ و $\boldsymbol{T_0}$

تعبير القانون الثالث لكبلير بالنسبة لحركة الأرض حول الشمس : $\frac{{T_T}^2}{{r_T}^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_S}$ ومنه : $m_S = \frac{4\pi^2{r_T}^3}{G.{T_T}^2}$

حسب السؤال5- قانون كبلير الثالث بالنسبة لحركة القمر حول الأرض : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_S}$ ومنه : $m_T = \frac{4\pi^2 r^3}{G.T^2}$

$$\frac{m_S}{m_T} = \frac{\frac{4\pi^2{r_T}^3}{G.{T_T}^2}}{\frac{4\pi^2 r^3}{G.T^2}} \Rightarrow \frac{m_S}{m_T} = \frac{{r_T}^3}{r^3}.\frac{T^2}{{T_T}^2} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{m_S}{m_T} = \left(\frac{r_T}{r}\right)^2.\left(\frac{T}{T_T}\right)^2}$$

ت.ع : $\boldsymbol{\frac{m_S}{m_T} = \left(\frac{1,496.10^8\ km}{4,22.110^4\ km}\right)^2.\left(\frac{1}{356,25}\right)^2 \approx 3,34.10^5}$



تمرين 3 :

الجزء الأول :

1- أ- أنظر التبيانة جانبه

ب- تعبير متجهة قوة التجاذب

حسب قانون نيوتن للتجاذب الكوني :

$$\vec{F}_{T/G} = -G.\frac{M_T.m}{(R_T+h)^2}.\vec{u}$$

2- أ- المرجع التي تدرس فيه حركة G

المرجع المركزي الأرضي.

ب- الإفتراض

لتطبيق القانون الثاني لنيوتن يجب أن يكون المرجع المركزي الأرضي غاليليا .

ج- تسارع G

تطبيق القانون الثاني لنيوتن على G نكتب : $\vec{F}_{T/G} = m.\vec{a}$

$m.\vec{a} = -G.\frac{M_T.m}{(R_T+h)^2}.\vec{u}$ نستنتج متجهة التسارع : $\vec{a} = -G.\frac{M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{u}$

3- أ-مميزات تسارع حركة دائرية منتظمة

في حركة دائرية منتظمة متجهة التسارع تكون انجذابية مركزية وقيمتها : $a = a_N = \frac{V^2}{R}$

ب- تعبير سرعة G

باعتبار التسارع منظميا نكتب :

$$a = a_N$$

$$\frac{V^2}{R_T+h} = \frac{G.M_T}{(R_T+h)^2}$$

$$V = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}$$

4- أ-الدور المداري :

تعريفه : يساوي المدة التي يستغرقها القمر الإصطناعي لإنجاز دورة واحدة حول الأرض.

تعبيره : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ مع : $V = (R_T+h).\omega$ من العلاقتين نستنتج : $T = \frac{2\pi(R_T+h)}{V}$

باعتبار تعبير السرعة نحصل على :

$$T = 2\pi(R_T + h).\sqrt{\frac{R_T + h}{G.M_T}}$$

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G.M_T}}}$$

الجزء الثاني :

1- أ- إتمام ملأ الجدول

القمر الإصطناعي	شعاع المسار $R(km)$	الدور المداري $T(s)$	$R^3(km^3)$	$T^2(s^2)$
GPS	$20{,}2.10^3$	$2{,}88.10^4$	$8{,}24.10^{12}$	$8{,}29.10^8$
$GLONASS$	$25{,}5.10^3$	$4{,}02.10^4$	$1{,}66.10^{13}$	$1{,}62.10^9$
$GOVE\ A$	$30{,}0.10^3$	$5{,}16.10^4$	$2{,}69.10^{13}$	$2{,}67.10^9$
$METEOSAT$	$42{,}1.10^3$	$8{,}58.10^4$	$7{,}46.10^{13}$	$7{,}36.10^9$

$$\boldsymbol{R = R_T + h = 6,38.10^3 + 23,6.10^3 = 30.10^3\ km}$$

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G.M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(30\times 10^3\times 10^3)^3}{6,67.10^{-11}\times 5,92.10^{24}}} = 5,16.10^4\ s}$$

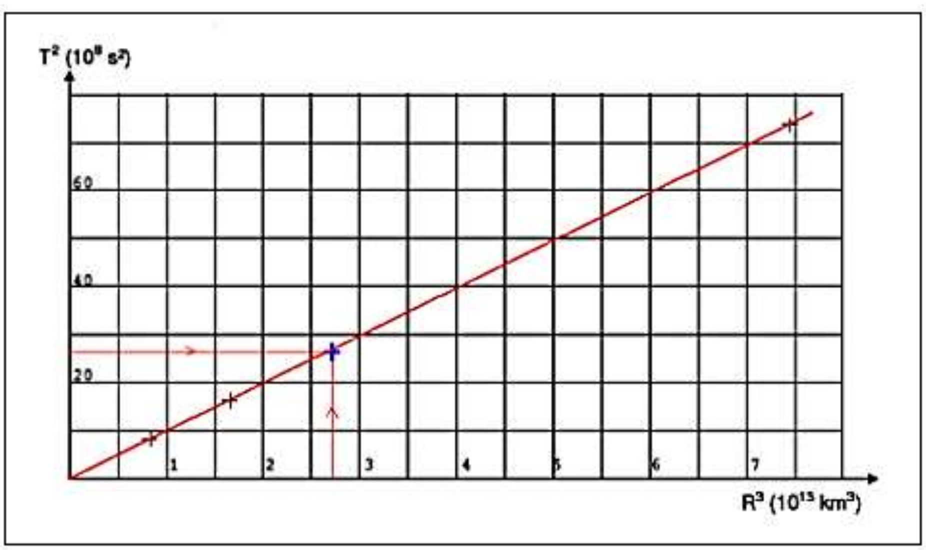
ب- المبيان $\boldsymbol{T^2 = f(R^3)}$

2- أ- استنتاج

المنحنى $\boldsymbol{T^2 = f(R^3)}$ عبارة عن دالة خطية إذن $\boldsymbol{T^2}$ تتناسب مع $\boldsymbol{R^3}$.

ب-تطابق بين الالنتائج التجريبية والنظرية

تجريبيا لدينا $K = \frac{T^2}{R^3}$ ويمثل المعامل الموجه للمنحنى



$$\boldsymbol{K = \frac{70.10^8}{7.10^{13}} = 1.10^{-12}\ s^2.m^{-3}}$$

نظريا : حسب نتيجة السؤال – 4 لدينا

العلاقة : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G.M_T}}$ أي: $T^2 = 4\pi^2.\frac{R^3}{G.M_T}$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T} \quad (1)$$

تعبير K هو : $K = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$

ت.ع : $K = \frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11} \times 5,92.10^{24}} = 9,89.10^{-14}\ s^2.m^3$

القيمتان التجريبية والنظرية للثابتة K تقريبا متساويتان .

نستنتج ان هناك تطابقا بين العلاقة (1) و المنحنى $T^2 = f(R^3)$

ج- اسم القانون

القانون الثالث لكبلير : $\frac{T^2}{R^3} = K$