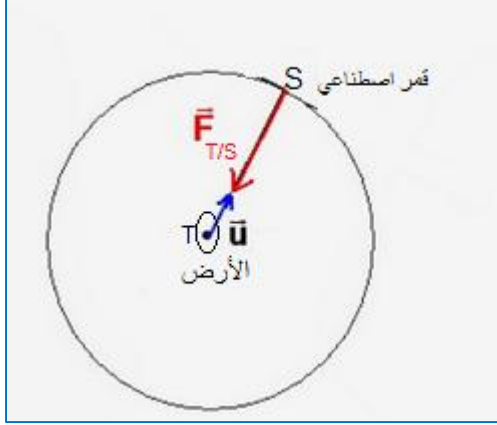


تصحيح تمارين حركة الأقمار الإصطناعية والكواكب

تمرين 1:



1- نبين أن حركة تيتان دائرية منتظمة:

يخضع تيتان لقوة $\vec{F}_{SLT}$ التجاذب الكوني المطبقة عليه من طرف زحل نعبّر عنها بالعلاقة:

$$\vec{F}_{S/T} = -G \frac{m \cdot M_S}{r^2} \vec{u}_{S/T}$$

حيث m كتلة القمر الإصطناعي و M_S كتلة زحل .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على تيتان ، في المعلم المركزي لزحل :

$$\vec{F}_{S/T} = m\vec{a}$$

باعتبار المتجهة الواحدة $\vec{n} = -\vec{u}_{ST}$ نكتب متجهة قوة التجاذب :

$$\vec{F}_{S/T} = G \frac{m \cdot M_S}{r^2} \vec{n}$$

$$m\vec{a} = G \frac{m \cdot M_S}{r^2} \vec{n}$$

$$\vec{a} = G \frac{M_S}{r^2} \vec{n}$$

في المعلم فرييني $(T, \vec{u}, \vec{n})$ لدينا : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$

وبالتالي : $\frac{dv}{dt} = 0$ أي $V = cst$ ومنه الحركة منتظمة

و $G \frac{M_S}{r^2} = \frac{v^2}{\rho}$ باعتبار $\rho = r$ نستنتج : $r = \frac{G \cdot M_S}{v^2} = cst$ إذن الحركة دائرية منتظمة.

2- تعبير الدور المداري:

الدور المداري T لتيتان هو المدة الزمنية التي ينجز فيها القمر دورة واحدة حول المريخ :

$$V = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{V}$$

تعبير السرعة :

$$G \frac{M_S}{r^2} = \frac{V^2}{r} \Rightarrow V^2 = \frac{GM_S}{r}$$

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$$

تعبير الدور المداري لتيتان :

$$T = \frac{2\pi r}{V} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_S}{r}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_S}} \text{ نستنتج:}$$

3- تحديد كتلة زحل:

العلاقة السابقة تكتب:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_S}$$

$$M_S = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}$$

ت.ع:

$$M_S = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \times \frac{(1,22 \cdot 10^9)^3}{(15,9 \times 24 \times 3600)^2}$$

$$M_S = 5,69 \cdot 10^{26} kg$$

تمرين 2:

1- الدور المداري واستنتاج التردد:

الدور المداري هو مدة دورة واحدة للقمر الاصطناعي في مداره حول الأرض.

حسب القانون الثالث لكيبلير:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

حيث : M كتلة الأرض و $r = R + h$ شعاع مدار القمر الاصطناعي.

العلاقة السابقة تكتب:

$$\frac{T^2}{(R + h)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} (R + h)^3$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R + h)^3}{G.M}}$$

ت.ع:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{[(6380 + 205) \times 10^3]^3}{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}}$$

$$T = 5,32.10^3 s = 1h29min$$

يساوي التردد مقلوب الدور:

$$N = \frac{1}{T}$$

ت.ع:

$$N = \frac{1}{5,32.10^3} = 1,88.10^{-4} Hz$$

2- سرعة القمر الاصطناعي:

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(R + h)}{T}$$

ت.ع:

$$V = \frac{2\pi(6380 + 205) \times 10^3}{5,32.10^3} = 7,78.10^3 m.s^{-1}$$

3- تسارع القمر الاصطناعي:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ التسارع المماسي:}$$

بما أن حركة القمر الاصطناعي منتظمة ، فإن $V = cst$ وبالتالي : $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$

$$a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R+h} \text{ التسارع المنظمي:}$$

ت.ع:

$$a_N = \frac{(7,78.10^3)^2}{(6380 + 205) \times 10^3} = 9,20 m.s^{-1}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_N^2} \text{ التسارع الكلي:}$$

بما أن التسارع المماسي منعدم أي: $a_t = 0$ فإن:

$$a = a_N = 9,20 m.s^{-1}$$

4- شدة القوة المطبقة على القمر الاصطناعي:
حسب القانون الثاني لنيوتن :

$$F = ma_N$$

ت.ع:

$$F = 87,3 \times 9,20 = 803N$$

ملحوظة :

يمكن استعمال شدة قوة التجاذب الكوني:

$$F = G \frac{M.m}{(R+h)^2}$$

تمرين 3 :

1-الشروط لكي يكون قمرا ساكنا بالنسبة للأرض :

*ينبغي أن يقع مداره في مستوى خط الإستواء.
*أن يدور في نفس منحى دوران الأرض حول محورها القطبي.
*أن يكون دوره المداري T مساويا لدور حركة دوران الأرض t_0 حول محورها القطبي .

2-تعبير التسارع:

في المعلم المركزي الأرضي ، يخضع القمر الإصطناعي (S) الى قوة التجاذب الكوني التي تطبقها الأرض عليه :

$$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{m.m_0}{r_0^2} \vec{u}_{TS}$$

نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{F}_{T/S} = m_0 \cdot \vec{a}$$

$$-G \frac{m.m_0}{r_0^2} \vec{u}_{TS} = m_0 \cdot \vec{a} \text{ أي}$$

باعتبار المتجهة الواحدة $\vec{n}$ هي : $-\vec{u}_{TS} = \vec{n}$
نستنتج :

$$(1) \quad \vec{a} = \frac{G.m_0}{r_0^2} \vec{n}$$

3-نبين أن الحركة منتظمة ودائرية:

في معلم فريني ($\vec{S}, \vec{u}, \vec{n}$) نكتب تسارع القم الإصطناعي كالتالي :

$$(2) \quad \vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{u} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n}$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2) نكتب:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{أي أن } V = cst \text{ ومنه فإن الحركة منتظمة.}$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2) نكتب:

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{G.m_0}{r_0^2} \text{ مع } \rho = r_0 \text{ نجد : } r_0 = \frac{G.m}{V^2} = cst \text{ وبالتالي الحركة دائرية.}$$

4- تعبير الدور T :

$$T = \frac{2\pi r_0}{V} \text{ : نعلم أن}$$

$$V = \sqrt{\frac{G.m}{r_0}} \text{ ومنه } V^2 = \frac{G.m}{r_0}$$

نستنتج تعبير T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{G.m}}$$

5- تعبير الثابتة K :

تعبير الدور T يكتب :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r_0^3}{G.m}$$

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G.m} \quad (3)$$

$$\frac{T^2}{r_0^3} = K \text{ : بما أن}$$

$$K = \frac{4\pi^2}{G.m} \text{ فإن}$$

6- تعبير النسبة $\frac{M}{m}$:

- باعتبار حركة القمر (S) حول الأرض مع $T = T_0$ العلاقة (3) تكتب: $\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G.m}$

- باعتبار حركة الأرض (T) حول الشمس مع $T = T_T$ و $r_0 = r_T$ العلاقة (3) تكتب: $\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$

M كتلة الشمس

نجز قسمة العلاقة الأولى على العلاقة الثانية :

$$\frac{\frac{T_0^2}{r_0^3}}{\frac{T_T^2}{r_T^3}} = \frac{\frac{4\pi^2}{G.m}}{\frac{4\pi^2}{G.M}}$$

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{T_0}{T_T}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_T}{r_0}\right)^3$$

ت.ع:

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{1}{365}\right)^2 \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 10^8}{4,2 \cdot 10^4}\right)^3 = 3,4 \cdot 10^5$$

كتلة الشمس أكبر بحوالي 340 000 مرة من كتلة الأرض.

$$m = \frac{2 \cdot 10^{30}}{3,4 \cdot 10^5} = 5,88 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

تمرين 4 :

1-المعلم المناسب لهذه الدراسة :

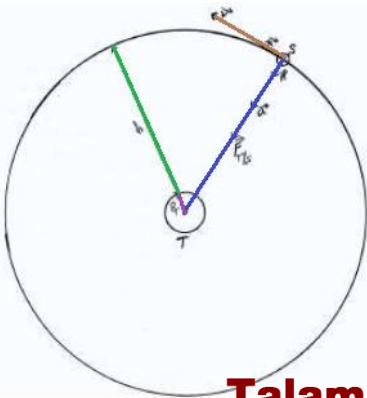
المعلم المركزي الأرضي ، أصله مركز الأرض ومحاوره موجهة نحو ثلاث نجوم ثابتة .

2-لكي يكون القمر الإصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض يجب :

- أن يساوي دوره المداري دو دوران الأرض حول محورها القطبي .
- أن يدور في منحنى دوران الأرض حمل نفسها .
- أن يدور في مستوى خط الإستواء.

3-تمثيل المتجهات : $\vec{F}_{T/S}$ و $\vec{V}$ و $\vec{a}$:

أنظر الشكل



4-تعبير سرعة القمر الإصطناعي :

يخضع القمر الإصطناعي الى قوة التجاذب

$$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{M_T.m}{(R_T+h)^2} \vec{u}_{TS} \text{ الكوني}$$

القانون الثاني لنيوتن يكتب:

$$\vec{F}_{T/S} = m\vec{a}$$

باعتبا معلم فريني $(S, \vec{u}, \vec{n})$ نسقط العلاقة على $(S, \vec{n})$ نجد :

$$F_{T/S} = m.a_N$$

$$G \frac{M_T.m}{(R_T+h)^2} = m.\frac{V^2}{R_T+h}$$

$$V^2 = \frac{G.M_T}{R_T+h} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}$$

ت.ع:

$$V = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}{6350.10^3 + 36000 \times 10^3}} = 3069m.s^{-1}$$

5-إثبات القانون الثالث لكيبلير :

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^2}{V^2} \text{ أي } T = \frac{2\pi(R_T+h)}{V}$$

نعلم أن:
كما أن:

$$V^2 = \frac{G.M_T}{R_T+h}$$

وبالتالي :

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^2}{\frac{G.M_T}{R_T+h}} = \frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{G.M_T}$$

نستنتج القانون الثالث لكيبلير:

$$\frac{T^2}{(R_T+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$$

$$\frac{T^2}{(R_T+h)^3} = K$$

6- حساب دور حركة الأرض حول محورها القطبي:
نعلم أن :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{V}$$

ت.ع:

$$T = \frac{2\pi(6350 + 36000) \times 10^3}{3069} = 86703s$$