## حل تمارين حركة قذيفة في مجال الثقلة

### التمرين 1:

1-نبين أن مسار الكرة مستو:

نعتبر أن الكرة في سقوط حر باهمال تأثير الهواء ، فإن تسارعها هو: $\vec{a} = \vec{g}$

الإسقاط في المعلم $( O,\vec{\imath},\vec{\jmath} )$ :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

باستعمال التكامل واعتبار الشروط البدئية:

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 sin\alpha \\ V_{0z} = 0 \end{cases} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

تكامل التسارع :

$$\begin{cases} V_x = V_o cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 sin\alpha \\ V_z = 0 \end{cases}$$ إحداثيات متجهة السرعة $\vec{V}$

تكامل السرعة :

$$\begin{cases} x(t) = (V_0 cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 sin\alpha)t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$ المعادلات الزمنية للحركة .

عند كل لحظة يكون مسار الكرة في المستوى الرأسي $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ وبالتالي تكون الحركة مستوية.

2-معادلة المسار:

للحصول على معادلة المسار نقصي الزمن t بين المعادلتين الزمنيتين .

لدينا : $x(t) = (V_0 cos\alpha)t$ ومنه: $t = \frac{x}{V_0.cos\alpha}$ نعوض في المعادلة $y(t)$ نحصل على :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_0.cos\alpha}\right)^2 + (V_0 sin\alpha)\frac{x}{V_0.cos\alpha}$$

نستنتج معادلة المسار :

$$y = -\left(\frac{g}{2{V_0}^2 cos^2\alpha}\right)x^2 + (tan\alpha)x$$

مسار الكرة جزء من شلجم لانها تكتب على الشكل y=a$x^2 + bx + c$

3-قيمة $V_0$ التي تمكن من تحقيق الهدف:

بما أن الكرة تمر محادية للعارضة الأفقية للمرمى ، فإن الشرط الذي ينبغي أن تحققه لتسجيل الهدف هو أن تمر من النقطة B وبالتالي النقطة B تنتمي للمسار ذات الإحداثيات :

$$\begin{cases} x_B = D \\ y_B = H \end{cases}$$

معادلة المسار تكتب:

$$H = -\left(\frac{g}{2{V_0}^2 cos^2\alpha}\right)D^2 + (tan\alpha)D$$

نستنتج :

$$\frac{gD^2}{2{V_0}^2 cos^2\alpha} = (tan\alpha)D - H$$

$${V_0}^2 = \frac{gD^2}{2(Dtan\alpha - H)cos^2\alpha}$$

$$V_0 = \frac{D}{cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(Dtan\alpha - H)}}$$

ت.ع:

$$V_0 = \frac{25}{\cos(30°)}\sqrt{\frac{10}{2(25\tan(30°) - 2{,}44)}}$$

$$V_0 = 18{,}6\, m.s^{-1}$$

تمرين 2:

1-معادلة المسار :

تخضع الكرة الحديدية أثناء حركتها في مجال الثقالة لوزنها فقط.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$يكتب:

$$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g}$$

ومنه: $\vec{a} = \vec{g}$

الإسقاط على المحور Ox و على المحور $Ox$:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} V_x = V_0.cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0.sin\alpha \end{cases} \text{ومنه:} \begin{cases} x(t) = (V_0 cos\alpha).t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 sin\alpha).t + h \end{cases}$$

للحصول على معادلة المسار نقصي الزمن t من المعادلتين الزمنيتين فنحصل على:

$$t = \frac{x}{V_0 cos\alpha} \Leftarrow y = -\frac{1}{2}g\left(t = \frac{x}{V_0 cos\alpha}\right)^2 + (V_0 sin\alpha)\left(\frac{x}{V_0 cos\alpha}\right) + h$$

$$y = -\frac{g}{2{V^2}_0 cos^2\alpha}x^2 + (tan\alpha).x + h$$

2-تعبير السرعة البدئية $V_0$ وحسابها :

عند الموضع $C$ لدينا : $\begin{cases} x_C = x_1 \\ y_C = 0 \end{cases}$ نعوض في معادلة المسار نحصل على:

$$0 = -\frac{g}{2{V^2}_0 cos^2\alpha}x_1^2 + (tan\alpha).x_1 + h$$

$$\frac{g}{2{V^2}_0 cos^2\alpha}x_1^2 = (tan\alpha).x_1 + h$$

$${V_0}^2 = \frac{g.x_1^2}{2(x_1.tan\alpha + h)cos^2\alpha} \Rightarrow V_0 = \frac{x_1}{cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(x_1.tan\alpha + h)}}$$

ت.ع: $V_0 = \frac{19{,}43}{\cos(45°)}\sqrt{\frac{10}{2\times(19{,}43\times\tan(45°)+1{,}8)}} = 13{,}2m.s^{-1}$

3-الإرتفاع الذي تصل إليه الكرة:

عند قمة المسار $S$ يكون : $\left(\frac{dy}{dt}\right)_S = 0$ أي: $-\frac{2g}{2{V^2}_0 cos^2\alpha}x + tan\alpha = 0$

$$x = \frac{{V^2}_0 cos^2\alpha.(tan\alpha)}{g} \Rightarrow x_S = \frac{{V^2}_0 cos\alpha.sin\alpha}{g}$$

$x_S = \frac{{V^2}_0.sin2\alpha}{2g}$ نعوض$x_S$ في تعبير معادلة المسار نجد:

$$y_S = -\frac{g}{2{V^2}_0 cos^2\alpha}{x^2}_S + (tan\alpha).x_S + h$$

$$H = y_S = \frac{{V^2}_0.\sin^2(\alpha)}{2g} + h$$

$$H = \frac{13{,}2^2 \times (\sin(45°)^2}{2 \times 10} + 1{,}8 = 6{,}2m$$

4-إحداثيات متجهة السرعة عند قمة المسار $S$ حيث الارتفاع $H$:

$$\begin{cases} V_{xS} = V_0 cos\alpha = 13,2 \times \cos(45°) = 9,33 m.s^{-1} \\ V_{yS} = 0 \end{cases}$$

5-منظم متجهة السرعة عند النقطة C:

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الكرة بين النقطتين A نقطة انطلاق الكرة و C نكتب :

$$\Delta Ec = Ec_C - Ec_A = W_{A\to C}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}m.V_C{}^2 - \frac{1}{2}m.V_O{}^2 = mgh \Rightarrow \frac{1}{2}V_C{}^2 - \frac{1}{2}V_O{}^2 = g.h$$

$$V_C = \sqrt{V_O{}^2 + 2gh} \Rightarrow V_C = \sqrt{13,2^2 + 2 \times 10 \times 1,8} = 14,5 m.s^{-1}$$

6-قيمة الزاوية $\beta$:

في النقطة $C$ حيث تسقط الكرة لدينا :

$$cos\beta = \frac{V_{xC}}{V_C} = \frac{V_O cos\alpha}{V_C}$$

ت.ع:

$$cos\beta = \frac{9,33}{14,5} = 0,64$$

$$\beta = cos^{-1}(0,64) = 50,2°$$

تمرين 3:

1-من خلال المبيان نلاحظ أن الدالة V=f(t) تآلفية (وتناقصية) وهي تكتب على الشكل

$$V(t) = a_x t + V_A$$

حيث $a_x$ التسارع و $V_0$ السرعة البدئية .

نستنتج أن الحركة مستقيمية متغيرة (متباطئة) بانتظام .

2-استنتاج قيمة كل من $a_x$ و $V_A$ :
من خلال المبيان يمثل الأرتوب $V_A$ السرعة عند t=0 نجد : $V_A = 10\,m.s^{-1}$
كما أن $a_x$ تمثل المعامل الموجه للمنحنى نكتب:

$$a_x = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10-8}{0-4} = -0{,}5\,m.s^{-1}$$

3-حساب f شدة قوة الاحتكاك :
تخضع الكرية أثناء حركتها على الجز ء $AB$ للقوى التالية:
$\vec{P}$ : وزن الكرية .
$\vec{R}$ : تأثير السطح الأفقي.
نطبق القانون الثاني لنيوتن في المعلم $(A\,,\vec{\imath}\,)$ الذي نعتبره غاليليا نكتب:

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

السقاط على المحور Ax :

$$0 - f = m.a_x$$

أي: $f = -m.a_x$

$$f = -0{,}5 \times (-0{,}5) = 0{,}25N$$

4-حساب سرعة الكرية عند اللحظة t=4s:
الطريقة الأولى:
معادلة السرعة:

$$V(t) = a_x t + V_A$$

السرعة $V_B$:

$$V_B = a_x t_B + V_A$$

ت.ع:

$$V_B = -0{,}5 \times 4 + 10 = 8\,m.s^{-1}$$

الطريقة الثانية :
باستعمال المبيان V=f(t):
عند اللحظة t=4s نجد السرعة $V = V_B = 8\,m.s^{-1}$

5-المعادلات الزمنية $x(t)$ و $y(t)$:
تخضع الكرية لوزنها $\vec{P}$ فقط :
القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} = m\vec{a}$$
$$m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$

نسقط العلاقة على $OxOy$:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

الحركة مستقيمية منتظمة على المحور $Ox$ و مستقيمية متغيرة بانتظام على المحور $Oy$.

باعتبار الشروط البدئية:

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases}$ و $\begin{cases} V_{0x} = V_B \\ V_{0y} = 0 \end{cases}$

المعادلتان الزمنيتان :

$x(t) = V_{0x}t + x_0$ أي: $x(t) = V_b t$

$y(t) = -\frac{1}{2}a_y t^2 + V_{0y}t + y_0$ أي: $y(t) = -\frac{1}{2}g\, t^2 + h$

6- تصل الكرية الى النقطة C عند اللحظة $t_C$ حيث الارتوب يكون : $y(t_C) = 0$

$$-\frac{1}{2}g\, t_C^2 + h = 0$$
$$\frac{1}{2}g\, t_C^2 = h$$
$$t_C = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{10}} = 0{,}64\ s$$

7- السرعة التي تصل بها الكرية الى النقطة C :

لدينا :

$\vec{V}_C = \vec{V}_{Cx} + \vec{V}_{Cy}$ أي: ${V_C}^2 = {V_{Cx}}^2 + {V_{Cy}}^2$

$V_C = \sqrt{{V_{Cx}}^2 + {V_{Cy}}^2}$ مع : $V_{Cx} = V_B$ و $V_{Cy} = g.t_C$

$$V_C = \sqrt{{V_B}^2 + (gt_c)^2} = \sqrt{8^2 + (10 \times 4)^2} = 10{,}7\ m.s^{-1}$$