

تمارين مصححة في الميكانيك

تمرين 1:

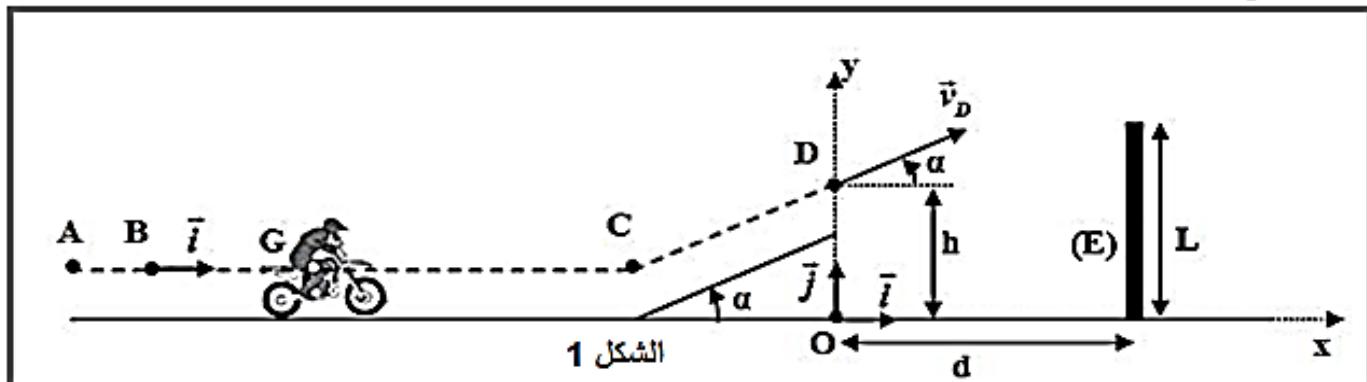
يهدف هذا التمرين إلى دراسة حركة مركز القصور G لمجموعة (S) كتلتها m مكونة من دراجة نارية وسانقها على حلبة سباق.

تتكون حلبة سباق من جزء مستقيم أفقي وجزء مستقيم مائل بزاوية α بالنسبة للمستوى الأفقي، ومنطقة للسقوط بها حاجز (E) علوه L يوجد على مسافة d من المحور الرأسى المار من النقطة D (الشكل 1).

معلومات:

- جميع الاحتكاكات مهملة؛

$$\alpha = 26^\circ \quad ; \quad d = 20 \text{ m} \quad ; \quad L = 10 \text{ m} \quad ; \quad m = 190 \text{ kg}$$



1. حركة المجموعة (S) على الجزء الأفقي

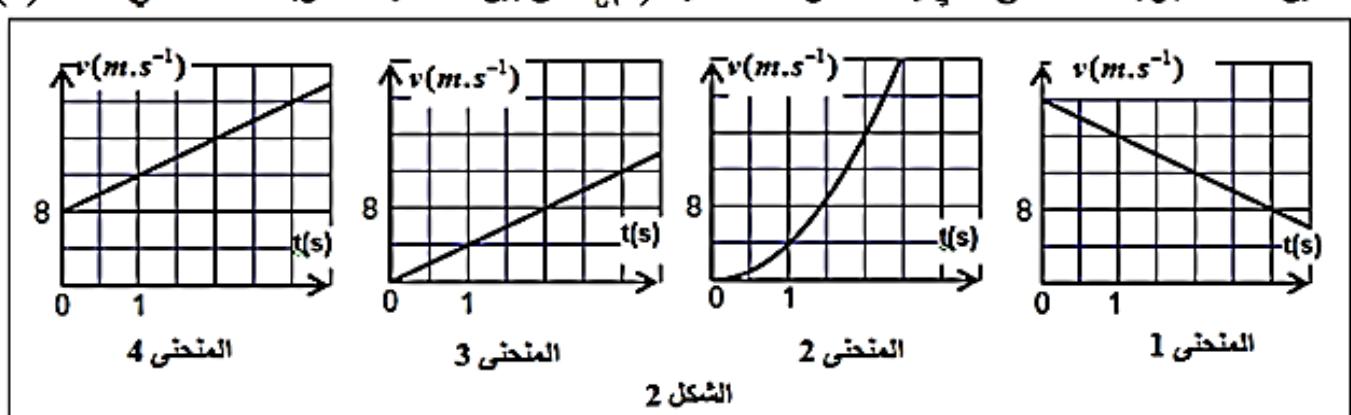
تنطلق المجموعة (S) من موضع يكون فيه مركز قصورها G منطبقاً مع النقطة A . يمر G من النقطة B بالسرعة $v_0 = \bar{v}_0$ عند اللحظة $t_0 = 0$. تخضع المجموعة (S) خلال حركتها لقوة محركة أفقية ثابتة لها نفس منحى الحركة حيث مسار G مستقيم.

لدراسة حركة G بين B و C نختار معلما (\bar{B}, \bar{t}) مرتبطا بالأرض نعتبره غاليليا حيث $x_B = x_G = 0$ عند $t_0 = 0$.

1.1. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن تعبير تسارع حركة G هو $a_G = \frac{F}{m}$. استنتج طبيعة حركة G .

2.1. يعبر عن السرعة اللحظية (t) لمراكز القصور G بالعلاقة $v_G(t) = a_G \cdot t + v_0$.

أ. عين، معلملا جوابك، المنحنى الذي يمثل السرعة اللحظية (t) من بين المنحنies الأربع الممثلة في الشكل (2).

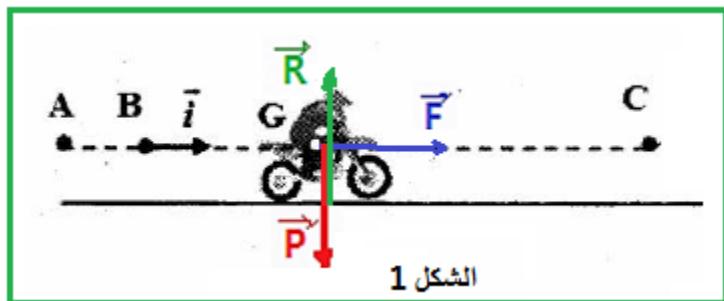


ب. استنتاج قيمة كل من السرعة البدنية v_0 والتسارع a_G لمركز القصور G .

3.1. أحسب شدة القوة المحركة F .

تصحيح التمرين 1:

1- حركة المجموعة (S) على الجزء الأفقي



1- إثبات تعبير تسارع حركة G :

المجموعة المدروسة : المجموعة (S)

جرد القوى:

\vec{P} وزن المجموعة

\vec{R} تأثير سطح التماس

\vec{F} تأثير القوة المحركة الأفقية

تطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$

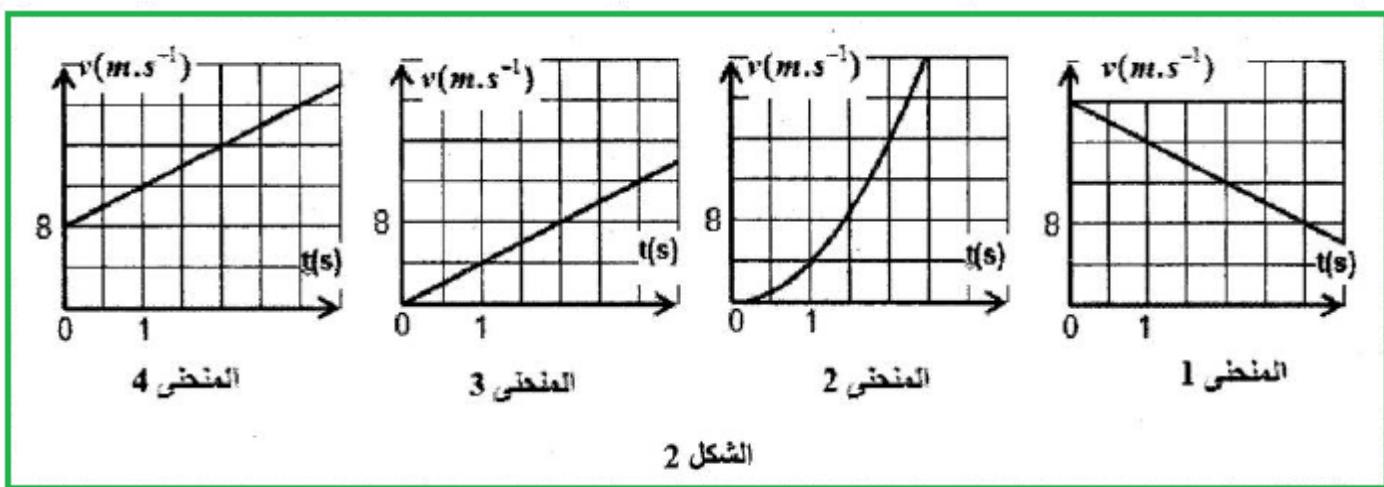
الإسقاط على المحور (i , \vec{t}) :

$$0 + 0 + F = m \cdot a_G$$

$$a_G = \frac{F}{m} = Cte$$

طبيعة حركة مركز القصور: حركة مستقيمية متغيرة بانتظام.

2- أ- تعين المنحنى الذي يمثل السرعة اللحظية ($v_G(t)$) :



سرعة الحركة المستقيمية المتتسارعة بانتظام عبارة عن دالة تالفية تزايدية ($v = a_G \cdot t + v_0$)

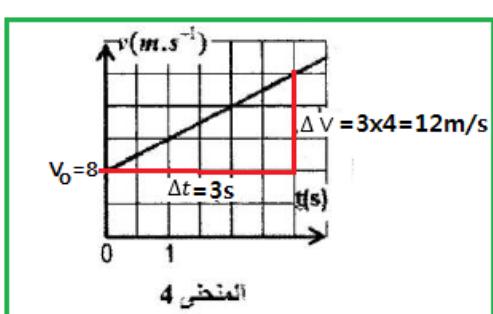
ويتعلق الامر بالمنحنى 4.

2- ب- استنتاج قيمة a_G و v_0 :

حسب المنحنى 4:

سرعة G عند $t = 0$ هي : $v_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$

المعامل الموجه للمسقط يكتب:



$$a_G = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3 \times 4}{3} = 4 \text{ m.s}^{-2}$$

3- حساب شدة القوة المحركة F :

لدينا:

$$a_G = \frac{F}{m}$$

$$F = m \cdot a_G$$

ت.ع:

$$F = 190 \times 4 = 760 \text{ N}$$

2- حركة المجموعة (S) خلال مرحلة القفز

1- إثبات المعادلتين التفاضلتين:

تخضع المجموعة (S) لقوة و حيادة الوزن \vec{P} .

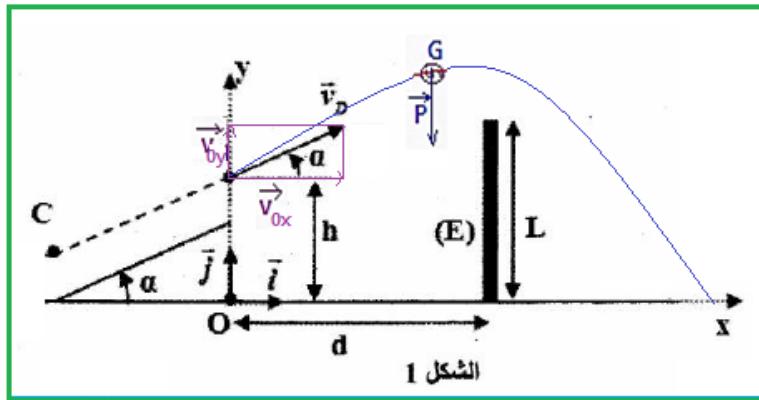
تطبيق القانون الثاني لنيوتون:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

حسب الشرط البدئية:

$$\overrightarrow{OD} \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{array} \right. \text{ و } \vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} V_{0x} = v_D \cdot \cos\alpha \\ V_{0y} = v_D \cdot \sin\alpha \end{array} \right.$$



إسقاط العلاقة ($\vec{a}_G = \vec{g}$) في المعلم (O, i, j):

$$\vec{a}_G \left| \begin{array}{l} a_G = 0 \\ a_G = -g \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \xrightarrow{\text{تكامل}} \vec{v}_G \left| \begin{array}{l} v_x = V_{0x} \\ v_y = -g \cdot t + V_{0y} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_G \left| \begin{array}{l} v_x = v_D \cdot \cos\alpha \\ v_y = -g \cdot t + v_D \cdot \sin\alpha \end{array} \right.$$

نستنتج المعادلتين التفاضلتين:

$$\begin{cases} \frac{dx_G}{dt} = v_D \cdot \cos\alpha \\ \frac{dy_G}{dt} = -g \cdot t + v_D \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

2- تحديد قيمة الارتفاع h و السرعة v_D :

حسب التعبير العددي للمعادلتين الزمنيتين:

$$y_G(t) = -5t^2 + 11 \cdot t + 5 \quad (2) \qquad \qquad x_G(t) = 22,5 \cdot t \quad (1)$$

عند اللحظة $t = 0$ لدينا: $y_G(0) = 5 \text{ m}$ نعوض $0 = h$ في المعادلة (2) نحصل على:

إذن: $h = 5 \text{ m}$

لدينا:

$$\frac{dx_G}{dt} = 22,5 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{نشتق المعادلة (1) بالنسبة للزمن نحصل على:} \quad \frac{dx_G}{dt} = v_D \cdot \cos\alpha$$

إذن:

$$v_D \cdot \cos\alpha = 22,5 \Rightarrow v_D = \frac{22,5}{\cos\alpha}$$

ت.ع:

$$v_D = \frac{22,5}{\cos(26^\circ)} = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

3- التحقق من ان القفزة تمت بنجاح ام لا :

نبحث عن الارتبوب ($y_G(d)$) ثم نتحقق من العلاقة : $y_G(d) > L + 0,6 \text{ m} = 10 + 0,6 = 10,6 \text{ m}$
نبحث أولاً عن معادلة المسار، نحصل عليها بإقصاء الزمن t المعادلتين الزمنية (1) و (2) :
 $(1) \rightarrow t = \frac{x_G}{22,5}$ نعوض t في المعادلة (2) نحصل على :

$$y_G(x_G) = -5 \left(\frac{x_G}{22,5} \right)^2 + 11 \cdot \frac{x_G}{22,5} + 5 \quad (3)$$

نعوض الاقصوال $x_G = d = 20 \text{ m}$ في معادلة المسار (3)

$$y_G(d) = -5 \times \left(\frac{20}{22,5} \right)^2 + 11 \times \frac{20}{22,5} + 5 \approx 10,83 \text{ m}$$

نلاحظ ان العلاقة $y_G(d) > 10,6 \text{ m}$ تتحقق و بالتالي القفزة تمت بنجاح.

تمرين 3: تحديد لزوجة زيت محرك السيارة

يلعب زيت المحرك دوراً مهما وأساسياً في التقليل من الاحتكاكات بين مكونات المحرك الداخلية عند اشتغاله تخفيف الزيوت من حيث لزوجتها.

لتحديد لزوجة زيت المحرك ننجذ تجربة السقوط الرأسية لكرية في الزيت ونقوم بتصوير حركتها بواسطة كاميرا رقمية ونحلل شريط الفيديو بواسطة برنامج مناسب فنحصل على تغيرات السرعة بدلالة الزمن.

ندرس حركة الكرينة في الزيت في معلم مرتبط بالأرض حيث محور الأنسياب رأسي ومنحاج نحو الأسفل.

المعطيات:

$$m = 35 \text{ g}$$

$$V = 33,5 \text{ cm}^3$$

$$\rho_f = 0,91 \text{ g.cm}^{-3}$$

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

حيث \vec{v} متوجهة سرعة مركز قصور الكرينة

$$k = 6\pi \cdot \eta \cdot R \text{ و } \eta \text{ لزوجة الزيت.}$$

$$\vec{F}_A = -\rho_f \cdot V \cdot \vec{g}$$

1- الدراسة التجريبية لحركة الكرينة:

1-1 ما طبيعة حركة الكرينة أثناء سقوطها في النظام الدائم.

1-2- حدد مبياناها السرعة الحدية للكرينة.

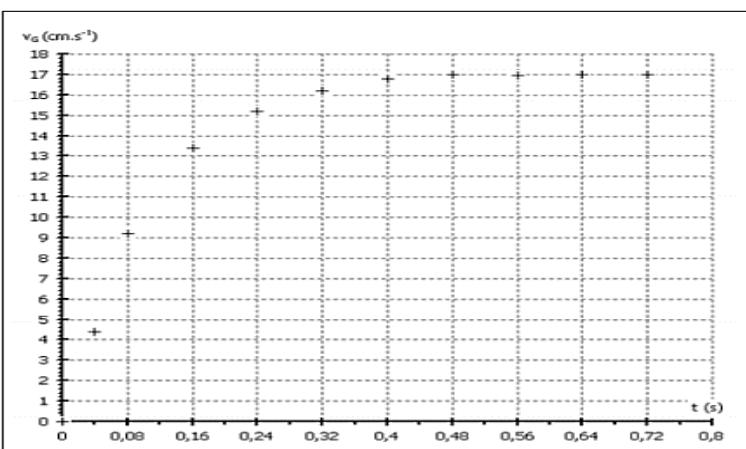
1-3- حدد مبياناها الزمن المميز للحركة.

1-4- استنتج التسارع البدئي.

2- الدراسة النظرية:

2-1- بتطبيق القانون الثالث لنيوتن بين أن تعبر المعادلة التفاضلية هو $\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v$ محدد تعبيير A و B .

2-2- يمثل الشكل جانبه قيمة التسارع والسرعة لصور الكرينة عند لحظات مختلفة.



هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

باستعمال طريقة أولير ، حدد قيمة a_0 و a_3 و v_3 .

$$B = 7,5 \text{ s}^{-1} \quad A = 1,27 \text{ S.I}$$

$t(s)$	0	0,080	0,16	0,24	0,32
$a(m.s^{-2})$	a_0	0,51	020	a_3	0,03
$v(m.s^{-1})$	0	0,102	0,102	v_3	0,165

3- تحديد لزوجة الزيت:

3-1- أحسب η لزوجة الزيت.

3-2- حدد اسم زيت المحرك المدروس من بين الزيوت الموجودة في الجدول التالي:

زيت المحرك عند 20°C			
	SAE 10	SAE 30	SAE 50
$\eta (Pa.s)$	0,088	0,290	0,700

تصحيح التمارين 2:

1- الدراسة التجريبية:

1-1- سقوط الكريمة يتم على مرحلتين:

- المرحلة الأولى، تتزايد السرعة تدريجيا (نظام انتقالي)

- المرحلة الثانية: تبقى السرعة ثابتة حركة مستقيمية منتظمة (نظام دائم)

1-2- السرعة الحدية:

$$v_{lim} = 17 \text{ cm/s}$$

1-3- الزمن المميز للحركة:

$$v(\tau) = 0,63 \quad v_{lim} = 0,63 \times 17 = 10,71 \text{ cm/s}$$

أقصى $10,71 \text{ cm/s}$ هو:

1-4- التسارع البدائي:

$$a_0 = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

$$a_0 = \frac{17 \cdot 10^{-2}}{0,12} \approx 141,66 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$a_0 \approx 1,42 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

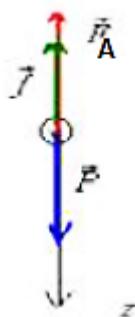
2- الدراسة النظرية:

2-1- التحقق من العادلة التفاضلية:

تخضع الكريمة أثناء حركتها إلى ثلاثة قوى:

\vec{F}_A : وزنها ، \vec{f} : دافعة أرخميدس و \vec{F} : قوة احتكاك المائع

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma



تطبق القانون الثاني لنيوتون في معلم مرتبط بالأرض نكتب:

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور Oz :

$$P - F_A - f = m \cdot a$$

$$m \cdot g - k \vee -\rho_f \cdot V \cdot g = m \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho_f \cdot V}{m} \right) - \frac{k}{m} \cdot V$$

$$B = \frac{k}{m} \quad \text{و} \quad A = g \left(1 - \frac{\rho_f \cdot V}{m} \right)$$

$$\frac{dV}{dt} = A - B \cdot V \quad \text{المعادلة التفاضلية تكتب:}$$

2- تحديد قيم a_0 و V_3

المعادلة التفاضلية تكتب: $a = A - B \cdot V$

عند $t = 0$ المعادلة تكتب: $A = 1,27 \text{ m/s}^2$ و $V_0 = 0$ مع $a_0 = A - B \cdot V_0$

$$a_0 = 1,27 \text{ m/s}^2 \quad \text{إذن:}$$

باستعمال طريقة أولير:

$$V_3 = V_2 + a_2 \cdot \Delta t$$

$$V_3 = 0,143 + 0,2 \times 0,08 \quad \text{باستعمال نتائج الجدول:}$$

$$V_3 = 0,077 \text{ m/s}$$

$$a_3 = A - B \cdot V_3 \quad \text{عند اللحظة } t_3 \text{ المعادلة تكتب:}$$

$$a_3 = 1,27 - 7,5 \times 0,077 = 0,077 \text{ m/s}^2$$

3- تحديد لزوجة الزيت:

3- حساب η

$$B = \frac{k}{m} = \frac{6\pi\eta R}{m} \quad \text{لدينا:}$$

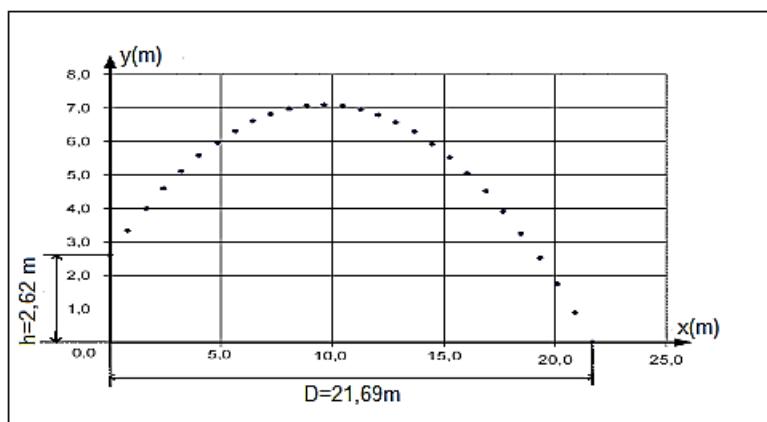
$$6\pi\eta R = B \cdot m \Rightarrow \eta = \frac{B \cdot m}{6\pi R}$$

$$\eta = \frac{7,5 \times 35 \cdot 10^{-3}}{6\pi \times 2 \cdot 10^{-2}} = 0,7 \text{ (SI)}$$

2- اسم زيت المحرك المستعمل:

حسب الجدول اسم الزيت هو **SAE 50**

تمرين 3: دراسة حركة مركز قصور الجلة

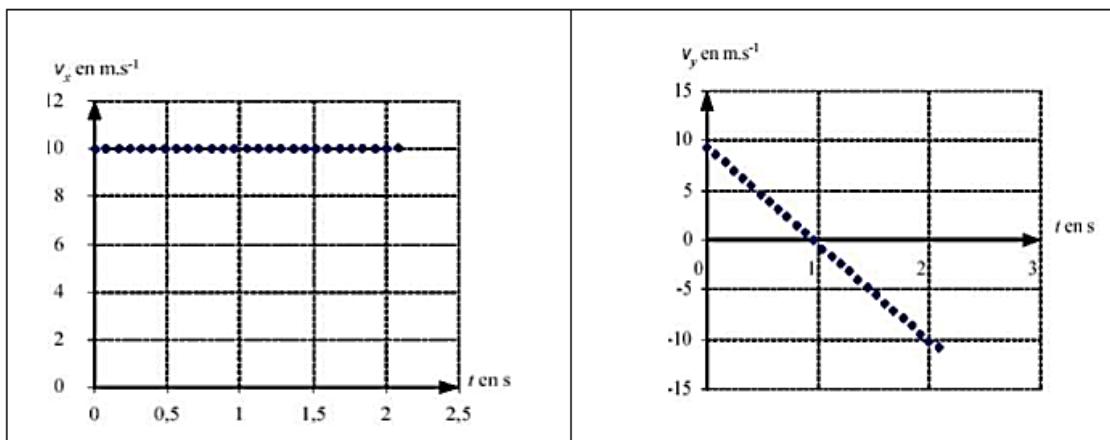


في بطولة العالم لسنة 2003 استطاع اللاعب البيلارسكي (Andrey mikhnevich) من نيل المرتبة الأولى في رمي الجلة مسجلاً مسافة = **21,69 m**.

يهدف هذا التمرين لدراسة حركة الجلة بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم ($\mathbf{O}, \mathbf{j}, \mathbf{i}$).

-الدراسة التجريبية:

يمثل الشكل 1 مسار مركز قصور الجلة. نحصل بواسطة برنامج مناسب على منحنى تغيرات V_x بدلالة الزمن و V_y بدلالة الزمن.



1-حدد مبيانيا v_{0x} و v_{0y} .

2-بين ان $\alpha = 43^\circ$ و $v_0 = 13,7 \text{ m/s}$.

3-ما طبيعة حركة الجلة على المحور الأفاصيل ثم على محور الأراتيب.

-II-الدراسة النظرية:

1-بتطبيق القانون الثاني لنيوتون بين ان المعادلات الزمنية لحركة الجلة تكتب على الشكل التالي:

$$x(t) = v_{0x} \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot \sin \alpha \cdot t + h$$

2-استنتج معادلة المسار.

3-احسب المدة الزمنية المستغرقة لسقوط الجلة على الأرض.

4-حدد السرعة التي تصطدم بها الجلة إلى سطح الأرض.

تصحيح التمرين 3:

-الدراسة التجريبية:

1-حدد مبيانيا v_{0x} و v_{0y} :

$$v_{0y} = 9 \text{ m/s} \quad \text{و} \quad v_{0x} = 10 \text{ m/s}$$

2-إثبات قيمة v_0 و α :

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$v_0 = \sqrt{10^2 + 9^2} = 13,7 \text{ m/s}$$

ت.ع :

لدينا:

$$\tan \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$\alpha = 43^\circ$$

أي:

3-طبيعة حركة الجلة:

على محور الأفاصيل حركة مستقيمية منتظمة.

على محور الأرatriب حركة مستقيمية متغيرة بانتظام.

II-الدراسة النظرية:

1-المعادلات الزمنية:

تخصيص الجلة أثناء حركتها للوزن \vec{P} فقط.

حسب القانون الثاني لنيوتن نكتب :

$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{أي:}$$

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

الإسقاط على المحور Ox وعلى المحور Oy :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{d \vec{v}_G}{dt} \Rightarrow \vec{a}_G \begin{cases} a_x = \frac{d v_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{d v_y}{dt} = -g \end{cases} \xrightarrow{\text{تكامل}}$$

$$\vec{v}_G \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = -g \cdot t + v_{0x} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{تكامل}} \begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + y_0 \end{cases}$$

حسب الشروط البدئية:

$$y_0 = h \quad x_0 = 0$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot \sin \alpha \quad \text{و} \quad v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

المعادلتان الزمنيتان هما : $y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + h$ و $x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$

2-معادلة المسار:

ننصي الزمن من المعادلتين الزمنيتين: $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$ نعرض في y

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} + h$$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha + h$$

3-المدة الزمنية المستغرقة لسقوط الجلة على الأرض:

إحداثيات نقطة سقوط الجلة على الأرض هما: ($D; 0$) المعادلة الزمنية للأقصول تكتب:

$$x = D = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$t = \frac{D}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

$$t = \frac{21}{13,7 \times \cos(43^\circ)} = 2,16 \text{ s}$$

4-السرعة التي تصل بها الجلة إلى سطح الأرض:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad \text{مع:}$$

$$v_x = 13,7 \cos(43^\circ) = 10,02 \text{ m/s}$$

$$v_y = -9,81 \times 2,16 + 13,7 \sin(43^\circ) = -11,85 \text{ m/s}$$

ت.ع:

$$v = \sqrt{(10,02)^2 + (-11,85)^2} = 15,52 \text{ m/s}$$