ميكانيك نيوتن

$$v_2 = \frac{|M_1 M_3|}{(t_3 - t_1)}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

بملاحظة سقوط تفاحة ، اكتشف إسحاق نيوتن مفهوم التجاذب الكوني ، كوني لأنه لايهم فقط كوكب الأرض بل كذلك الكون ككل .
و قد توصل كذلك إلى بلورة القوانين الثلاثة التي تنظم حركة الأجسام .

اسحاق نيوتن (1642 - 1727)

1) حركة مركز قصور جسم صلب .

1 - 1) تذكير .

نقتصر في الثانوي على دراسة ميكانيك النقطة المادية ، أي دراسة حركة نقطة ذات كتلة m في المكان و الزمان .
في أحسن الأحوال نستطيع أن نصف حركة مجموعة من النقط ساكنة فيما بينها و تكون جسما غير قابل للتشويه .
المرجع هو جسم صلب ندرس بالنسبة له حركة المجموعة . و هو ضروري بالنسبة للدراسة الميكانيكية ، حيث أن طبيعة حركة النقطة تتعلق بمرجع الدراسة .
نقرن بكل مرجع :

- معلم الفضاء $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، الذي نختاره بحيث يصف الحركة بطريقة أبسط .
- معلم الزمن ، حيث أصل التواريخ يوافق بداية الحركة أو طورا مميزا .

عندما يكون جسم صلب في سقوط حر ، توجد هناك نقطة من هذا الجسم لها أبسط حركة من النقط الأخرى : هذه النقطة هي **مركز قصور الجسم ، نرمز له بالحرف G .**
مركز قصور جسم صلب متجانس منطبق مع مركز تماثله (إذا كان له مركز تماثل) .
كل مجموعة مادية تتكون من مجموعة من الدقائق $A_1, A_2, ..., A_N$ لها بالتتابع الكتل $m_1, m_2, ..., m_N$
يمكن معرفة موضع مركز القصور G بتطبيق العلاقة المرجحية :

$$m_1\,\overrightarrow{GA_1} + m_2\,\overrightarrow{GA_2} + ... + m_N\,\overrightarrow{GA_N} = \vec{0}$$

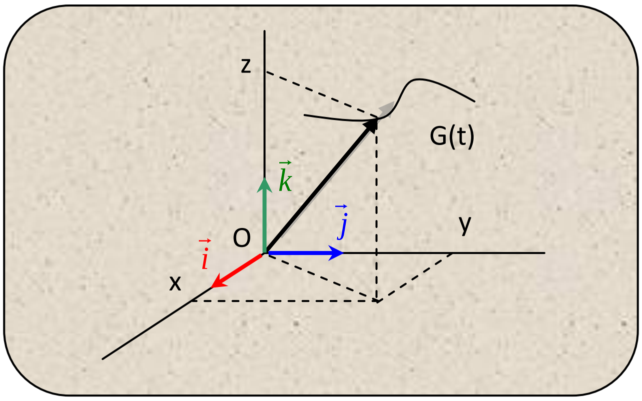
أو

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\,\overrightarrow{OA_1} + m_2\,\overrightarrow{OA_2} + ... + m_N\,\overrightarrow{OA_N}}{m_1 + m_2 + ... m_N}$$

1 - 2) متجهة الموضع .

○ **معلم ديكارتي**

يمكن معلمة موضع مركز القصور G لمجموعة في كل لحظة ، بواسطة متجهة الموضع $\overrightarrow{OG}$



في معلم الفضاء المرتبط بمرجع الدراسة نكتب :

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

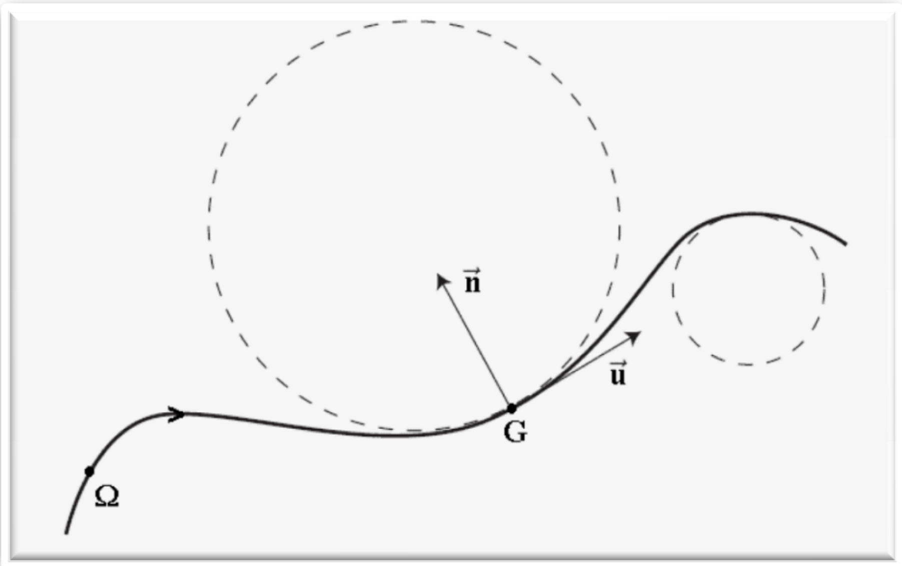
إذا كان الجسم في حالة حركة ، فإن الإحداثيات y,x و z تتغير . لذا نرمز لهم ب $y(t),x(t)$ و $z(t)$ و تسمى المعادلات الزمنية للحركة .

مجموع المواضع المحتلة بالتتابع من طرف G خلال الزمن تكون مسار هذه النقطة .

○ **معلم فريني**

معلم فريني معلم أصله مرتبط بالنقطة المتحركة G : $(G,\vec{u},\vec{n})$

- $\vec{u}$ متجهة واحدية اتجاهها هو مماس المسار و موجهة في منحى الحركة .
- $\vec{n}$ متجهة واحدية اتجاهها منظمي المسار و موجهة نحو تقعره .



خلال حركة مستوية يمكن معلمة موضع G باعتماد أفصولها المنحني :

$$s = \Omega G$$

Ω أصل الأفاصيل المنحنية

1 - 3) متجهة السرعة .

السرعة اللحظية $v(t_i)$ لنقطة متحركة M عند اللحظة t_i تساوي السرعة المتوسطة لهذه النقطة بين اللحظتين t_{i-1} و t_{i+1} اللتان تؤطران t_i و قريبتين أقصى ما يمكن من اللحظة t_i :

$$v(t_i) = \frac{\overset{\frown}{M_{i-1}M_{i+1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

في مرجع معين ، متجهة السرعة $\vec{v}$ لنقطة متحركة M هي المشتقة بالنسبة للزمن لمتجهة الموضع $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

في مجال زمني صغير جدا ، لدينا :

$$\vec{v}(t_i) \approx \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{t_{i+1}-t_{i-1}} = \frac{\overrightarrow{OM_{i+1}}-\overrightarrow{OM_{i-1}}}{t_{i+1}-t_{i-1}} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t_i)}{\Delta t}$$

يمكن أن نكتب اذن :

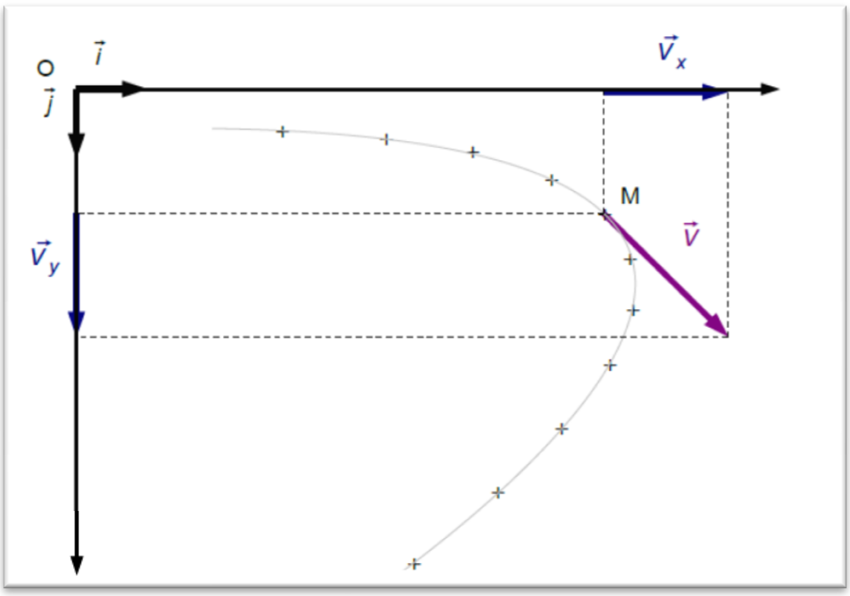
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

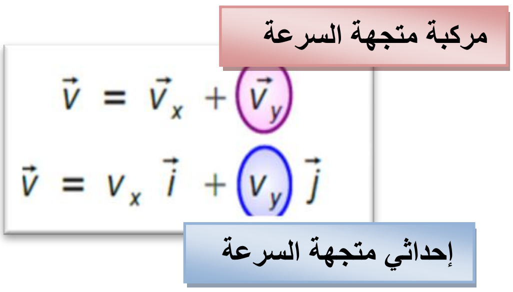
و بذلك فإن متجهة السرعة اللحظية محمولة من طرف مماس المسار عند لحظة **t** و موجهة في منحى الحركة .

*** إحداثيات متجهة السرعة :**

في معلم ديكارتي	في معلم فريني
$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$ مع : $V_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ $V_y(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ $V_z(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$	$\vec{V} = V\vec{u}$ مع : $V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ V تمثل القيمة الجبرية لمنظم متجهة السرعة اللحظية $\lvert V \rvert = \lVert \vec{V} \rVert = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (m.s^{-1})$

*** ملحوظة :**
إحداثيات متجهة قيم جبرية ، لا يجب الخلط بينها و بين مركباتها التي هي متجهات .





1 - 4) متجهة التسارع .

*** تعريف :**

في مرجع معيَّن ، متجهة التسارع $\vec{a}$ لنقطة متحركة هي المشتقة بالنسبة للزمن لمتجهة السرعة $\vec{V}$ لهذه النقطة المتحركة :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

في النظام العالمي للوحدات ، قيمة التسارع يعبر عنها بوحدة $(m.s^{-2})$:

$$[a_G] = \left[\frac{\Delta v_G}{\Delta t}\right] = \frac{L.T^{-1}}{T} = L.T^{-2}$$

*** الإحداثيات :**

لنعتبر متجهة الموضع $\overrightarrow{OM}$ في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}\vec{i} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_Y}\vec{j} + \underbrace{\frac{dv_z}{dt}}_{a_z}\vec{k}$$

إحداثيات متجهة التسارع هي مشتقات إحداثيات متجهة السرعة :

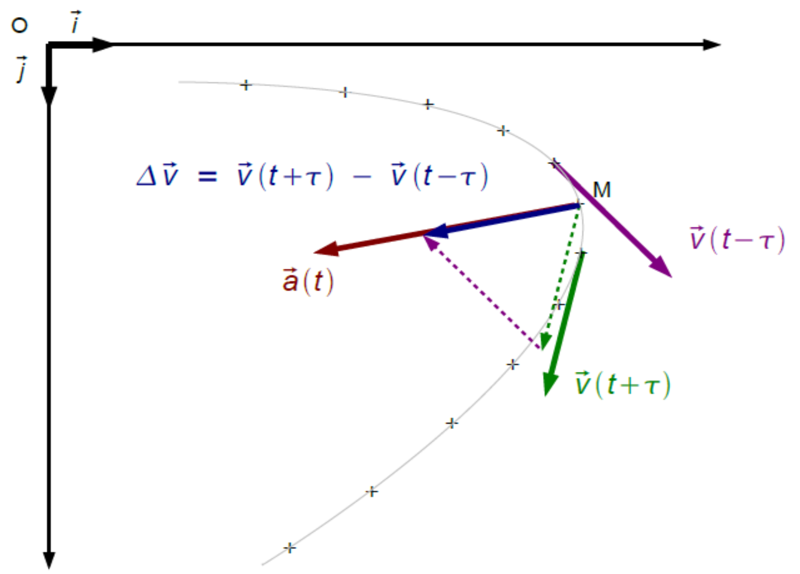
$$\vec{a}\ \left|\ \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned}\right.$$

*** التحديد المبياني :**

بالاعتماد على تسجيل لمواضع نقطة متحركة خلال مدد متتالية و متساوية τ ، يمكن تحديد متجهة التسارع في موضع ما بتطبيق علاقة التأطير : $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ مع $\Delta t = 2\tau$

عند اللحظة t توجد النقطة المتحركة عند الموضع M مثلا :

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{V}(t+\tau) - \vec{V}(t-\tau)}{2\tau}$$

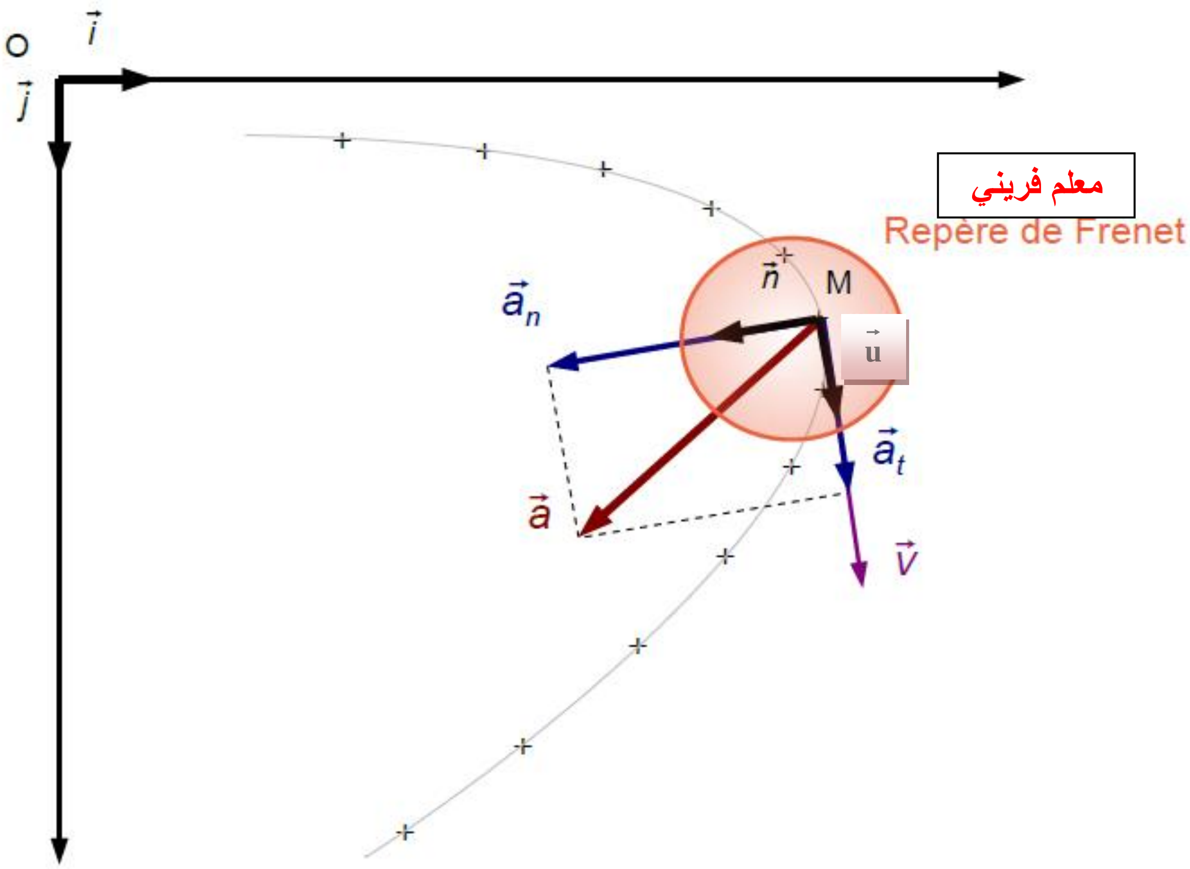


* المركبة المنظمية و المركبة المماسية :

في معلم فريني $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{u} + V\frac{d\vec{u}}{dt}$ ، يمكن أن نبرهن أن $V\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{V^2}{\rho}\vec{n}$ حيث نكتب :

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

مع : ρ شعاع انحناء المسار عند النقطة المعنية . إذا كان المسار دائريا فإن شعاع الانحناء هو شعاع الدائرة .



المركبة المماسية للتسارع — المركبة المنظمية للتسارع

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

مع :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$ و $$a_t = \frac{dv}{dt}$$

قيمة a_n دائما موجبة ، متجهة التسارع دائما موجه نحو تقعر المسار

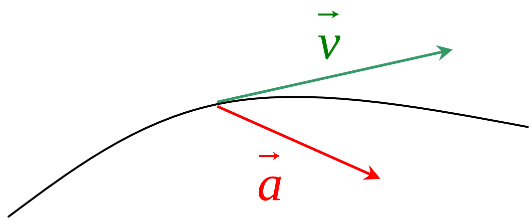
منظم متجهة التسارع : $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

*** منحى متجهة التسارع و طبيعة الحركة :**

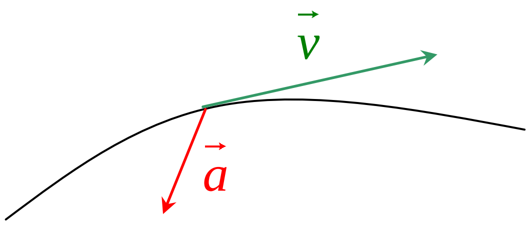
يمكن للإحداثي المماسي a_t أن يكون موجبا ، في هذه الحالة يكون منحى المتجهة $\vec{a}_t$ هو منحى السرعة $\vec{V}$ (منحى الحركة) .
و بالتالي يكون الجداء السلمي $\vec{V}.\vec{a}_t$ موجبا (أي : $\vec{V}.\vec{a}_t > 0$) .
كما يمكن للإحداثي a_t أن يكون سالبا ، و في هذه الحالة يكون منحى $\vec{a}_t$ و منحى $\vec{V}$ متعاكسان ، و بالتالي يكون الجداء السلمي $\vec{V}.\vec{a}_t$ سالبا (أي : $\vec{V}.\vec{a}_t < 0$) .
و بما أن الإحداثي a_n دائما موجب ، نستنتج من هذه الملاحظات أن إشارة الجداء السلمي $\vec{V}.\vec{a}_t$ تحدد طبيعة الحركة . و ذلك لأن :

$$\vec{V}.\vec{a} = \vec{V}.(\vec{a}_t + \vec{a}_n) = \vec{V}.\vec{a}_t + \vec{V}.\vec{a}_n = \vec{V}.\vec{a}_t + 0$$

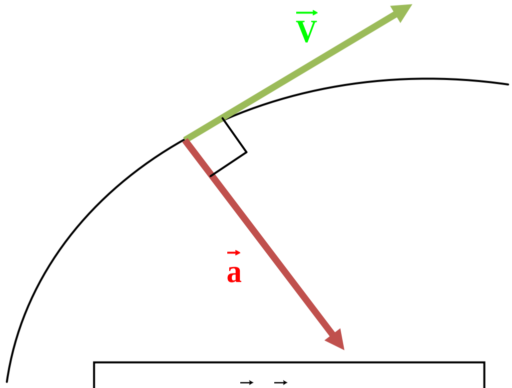
فإذا كان $\vec{V}.\vec{a} > 0$ فإن الحركة متسارعة و إذا كان $\vec{V}.\vec{a} < 0$ فإن الحركة متباطئة .
أما إذا كان $\vec{V}.\vec{a} = 0$ فإن الحركة منتظمة



$\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$
الحركة متسارعة



$\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$
الحركة متباطئة



$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$
الحركة منتظمة

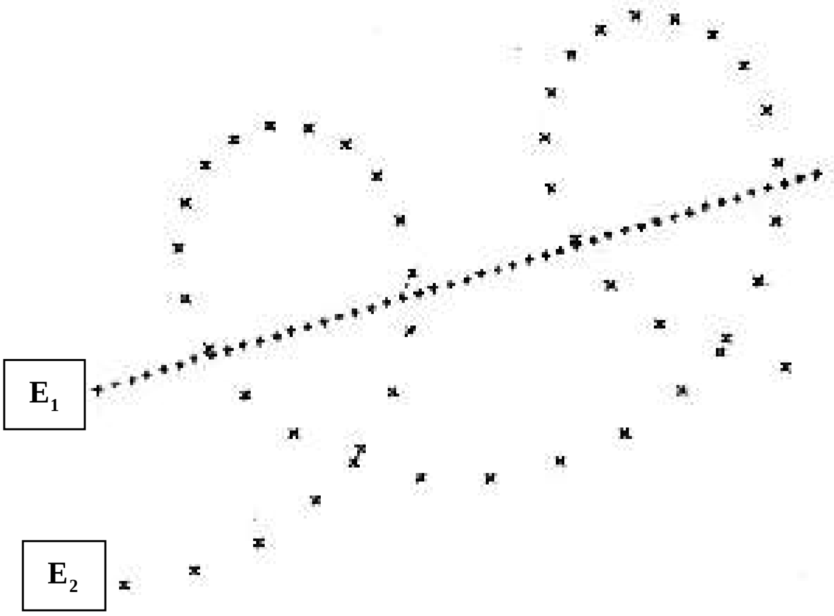
2) قوانين نيوتن :

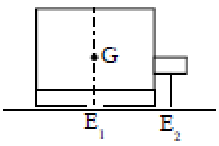
2 - 1) القانون الأول : مبدأ القصور .

في معلم غاليلي ، إذا كان المجموع المتجهي للقوى الخارجية المطبقة على جسم صلب مجموع منعدم (جسم صلب شبه معزول) ، فإن متجهة سرعة مركز قصوره متجهة ثابتة ، و العكس صحيح .

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \iff \overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{Cste}$$

مركز قصور جسم صلب خاضع لقوى متوازنة ، إما أن يكون ساكنا ($\vec{V}_G = \vec{0}$) ، أو أن يكون له حركة مستقيمية منتظمة ($\vec{V}_G = \overrightarrow{Cte} \neq \vec{0}$) .
القانون الأول يخص فقط مركز قصور جسم صلب ، و لا يهم النقط الأخرى .



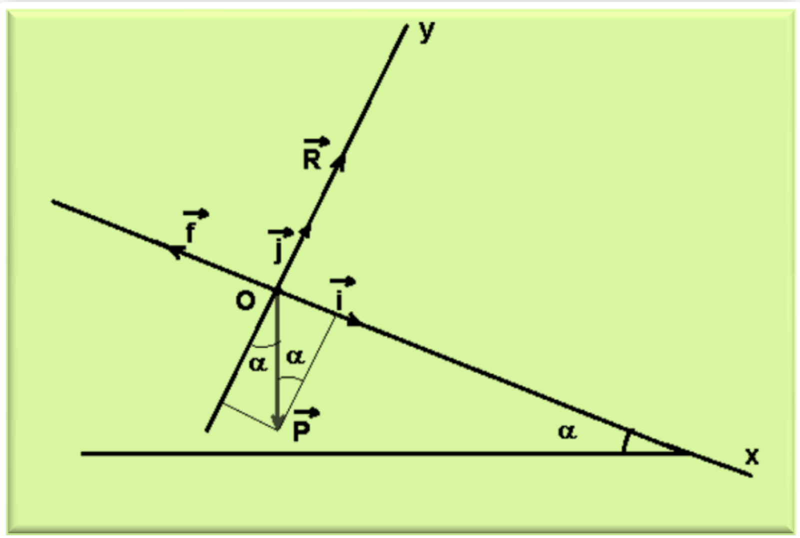


لا يطبق مبدأ القصور إلا في المعالم الغاليلية . قبل حل أي مسألة في الميكانيك يجب التأكد من أن المعلم المختار لدراسة حركة مركز القصور معلم غاليلي . مثلا المعلم المركزي الشمسي (معلم كوبرنيك)
المعلم المركزي الأرضي أو المعلم الأرضي معالم غاليلية بتقريب (حركات ذات مدة قصيرة) .

*** مثال :**

في المرجع الأرضي ، نعتبر متزلج كتلته $m = 60kg$ ينزل مستوى مائل بالزاوية $\alpha = 25°$ بالنسبة للمستوى الأفقي . المتزلج له حركة مستقيمية منتظمة .
أحسب شدة قوة الاحتكاك و شدة القوة المنظمية المطبقة من طرف السطح المائل على المتزلج . نأخذ $g = 9,8N.kg^{-1}$

نعتبر أن المرجع الأرضي مرجعا غاليليا
الجسم المدروس هو المتزلج
جرد القوى :
$\vec{P}$ الوزن
$\vec{R}$ القوة المنظمية المطبقة من طرف السطح على المتزلج
$\vec{f}$ قوة الاحتكاك



الحركة مستقيمية منتظمة ، و حسب القانون الأول لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0}$$

اختيار معلم للإسقاط $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
في هذا المعلم :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} P_x + R_x + f_x = 0 \\ P_y + R_y + f_y = 0 \end{cases}$$

إحداثيات المتجهات في هذا المعلم :

$$\vec{R}\begin{vmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{vmatrix} \; ; \; \vec{f}\begin{vmatrix} f_x = -f \\ f_y = 0 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{P}\begin{vmatrix} P_x = P.\sin\alpha \\ P_y = -P.\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$P.\sin\alpha + 0 - f = 0 \Rightarrow f = P.\sin\alpha$$

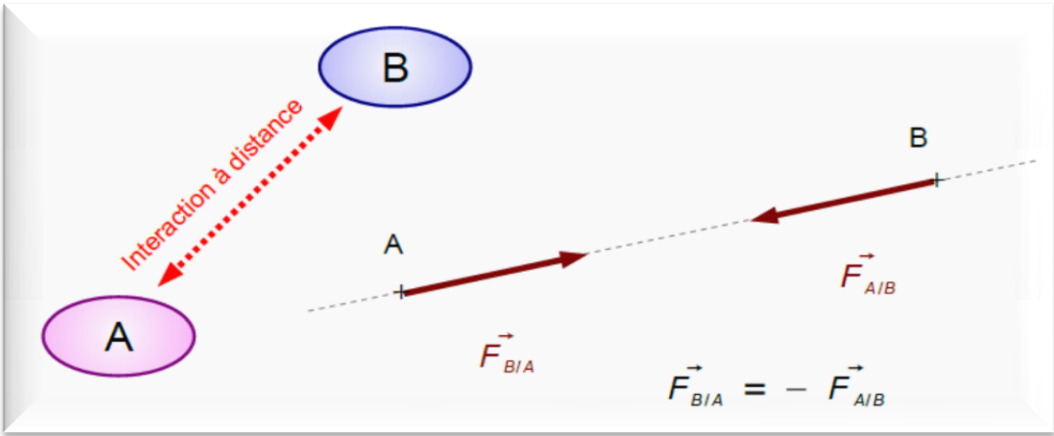
$$-P.\cos\alpha + R + 0 = 0 \Rightarrow R = P.\cos\alpha$$

بما أن $P = m.g$ فإن : $f = m.g.\sin\alpha = 249N$ و $R = m.g.\cos\alpha = 530N$

2 - 2) القانون الثالث : مبدأ التأثيرات البينية .

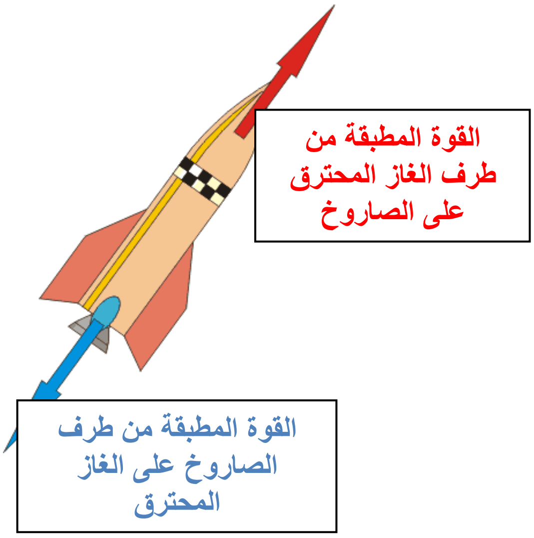
لنعتبر جسمين A و B في تأثير بيني . القوة المطبقة من طرف A على B : $\overrightarrow{F_{A/B}}$ و القوة المطبقة من طرف B على A : $\overrightarrow{F_{B/A}}$. كيفما كانت حالة حركة أو سكون الجسمين ، فإن القوتين يحققان المتساوية :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$



*ملحوظة : القانون الثالث يبقى صالحا كيفما كان المرجع غاليليا أو غير غاليليا .

* مثال : التأثير بيني الحاصل بين صاروخ و الغاز المحترق . القوتان المتبادلتان متعاكستان



2 - 3) القانون الثاني : مبرهنة مركز القصور (العلاقة الأساسية للديناميك) .

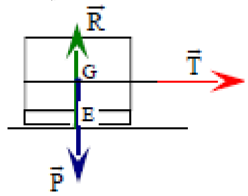
في مرجع غاليلي يساوي مجموع متجهات القوى الخارجية المطبقة على جسم صلب ، جذاء كتلته و متجهة تسارع مركز قصوره في كل لحظة .

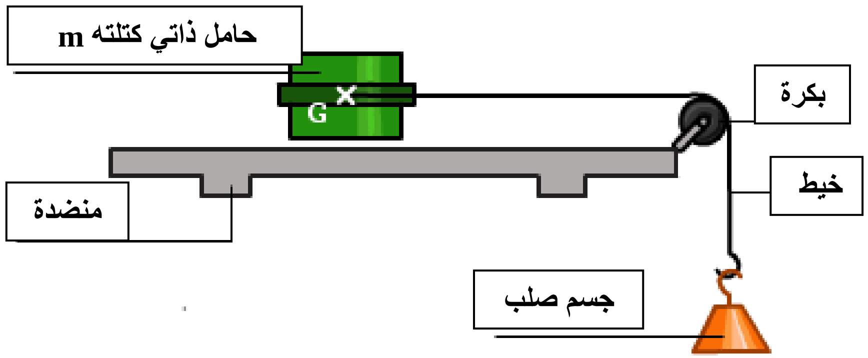
$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a_G}$$

كالقانون الأول لنيوتن ، القانون الثاني لنيوتن لا يطبق إلا بالنسبة لحركة مركز القصور ؛ و العلاقة التي ينص عليها غير صالحة إلا في المعالم الغاليلية .

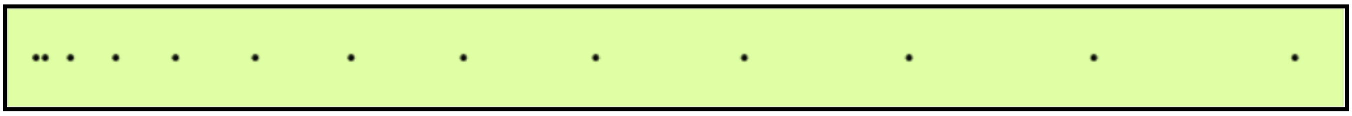
* ملحوظة : متجهة تسارع مركز القصور $\vec{a}_G$ و متجهة حصيلة القوى الخارجية $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ يوجدان في نفس المستقيم و لهما نفس المنحى .

* مثال : حامل ذاتي مجرور على منضدة تحت تأثير القوة المطبقة من طرف خيط .





يجر حامل ذاتي على منضدة أفقية بدون احتكاك تحت تأثير قوة ثابتة $\vec{F}$ اتجاهها أفقي . ثم نسجل مواضع مركز قصوره G خلال مدد زمنية متتالية و متساوية $\tau = 40ms$ فنحصل على التسجيل التالي :



يمكن التحقق من أن حركة G حركة مستقيمية متسارعة بانتظام أي $\vec{a}_G = \frac{\Delta \vec{V}}{2\tau} = \overrightarrow{Cte}$

و أن هناك تناسب بين حصيلة القوى المطبقة على الحامل الذاتي $\vec{F}$ و متجهة تسارع مركز القصور $\vec{a}_G$ و معامل التناسب هو كتلة الحامل m : $\frac{\vec{F}}{\vec{a}_G} = m$

3) الحركة المستقيمية المتغيرة بانتظام .

*** تعريف :**

نقول بأن حركة مركز القصور G لجسم صلب حركة مستقيمية متغيرة بانتظام ، عندما يكون مساره مستقيميا و تسارعة ثابتا :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{Cte}$$

*** المعادلة الزمنية :**

باستعمال الحساب التكاملي و انطلاقا من العلاقة السابقة ، نحصل على المعادلة الزمنية $x = f(t)$:

$$a = \frac{dV}{dt} \xrightarrow{\text{تكامل}} V = at + V_0$$

$$V = \frac{dx}{dt} = at + V_0 \xrightarrow{\text{تكامل}} x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

المعادلة الزمنية لحركة مستقيمية متغيرة بانتظام معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن t :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

*** خلاصة :**

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \;\underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{إشتقاق}}{\rightleftarrows}}\; V=at+V_0$$

$$V=at+V_0 \;\underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{إشتقاق}}{\rightleftarrows}}\; a = \frac{dV}{dt} = Cte$$

*** ملحوظة :**

تتعلق قيمتا V_0 و x_0 بالشروط البدئية للحركة

(الموضع و السرعة في اللحظة $t = 0$)

* خاصيات الحركة المستقيمية المتغيرة بانتظام :

العلاقة المستقلة عن الزمن

نعتبر متحركا في حركة مستقيمية متغيرة بانتظام في موضعين مختلفين G_1 و G_2 :

$$G_1\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + V_0t_1 + x_0 & (1) \\ V_1 = at_1 + V_0 & (1') \end{cases} \quad \text{و} \quad G_2\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + V_0t_2 + x_0 & (2) \\ V_2 = at_2 + V_0 & (2') \end{cases}$$

من العلاقة $(1')$ نستنتج : $t_1 = \frac{V_1 - V_0}{a}$ و بتعويض t_1 في المعادلة (1) نجد :

$$x_1 = \frac{1}{2}a\left(\frac{V_1 - V_0}{a}\right)^2 + V_0\left(\frac{V_1 - V_0}{a}\right) + x_0$$

و بالتالي :

$$V_1^2 - V_0^2 = 2a\left(x_1 - x_0\right) \qquad (3)$$

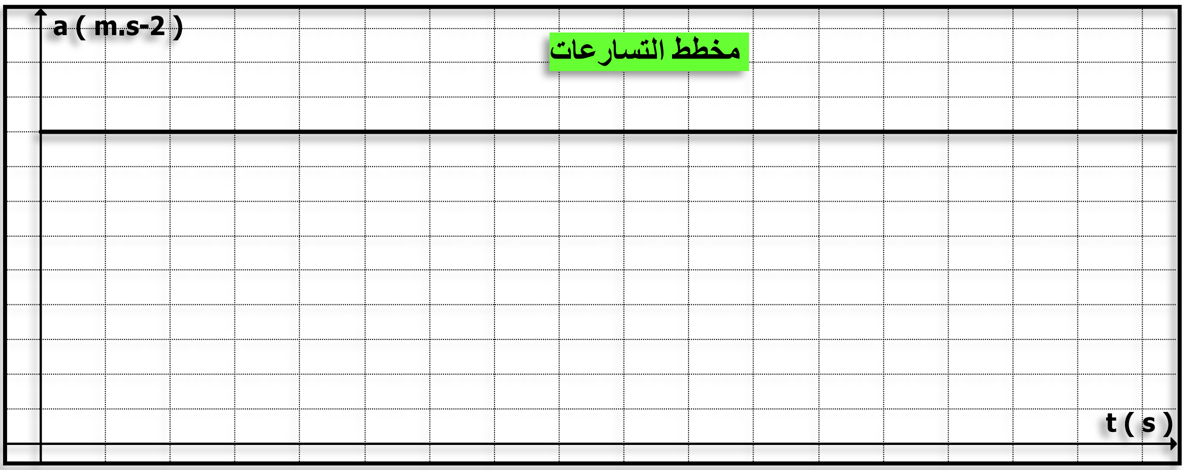
من العلاقة $(2')$ نستنتج : $t_2 = \frac{V_2 - V_0}{a}$ و بتعويض t_2 في المعادلة (2) نجد كذلك :

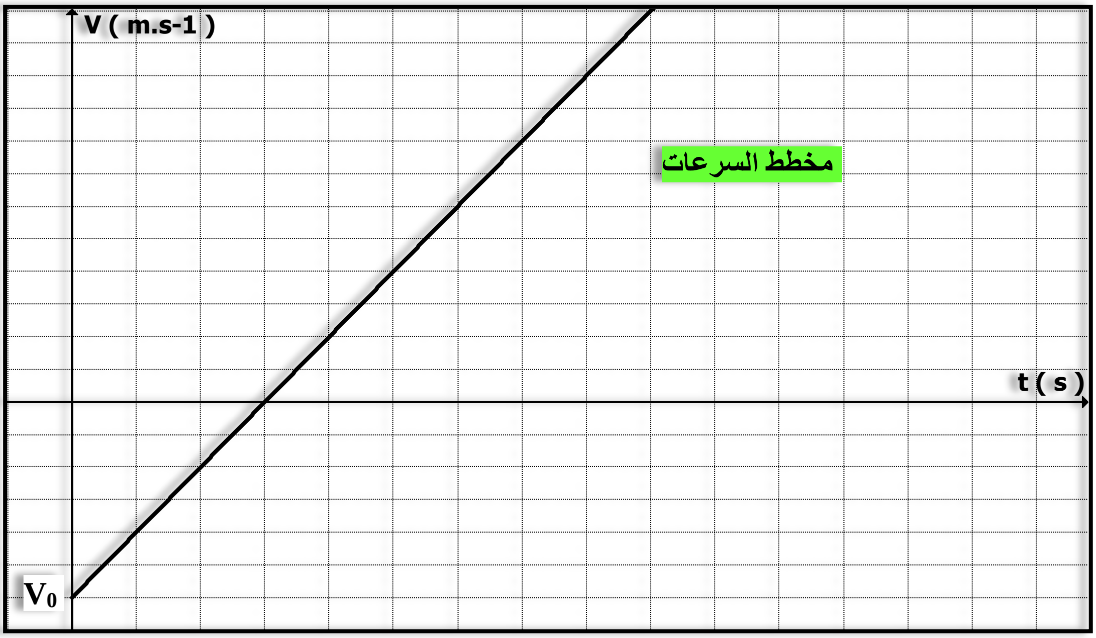
$$V_2^2 - V_0^2 = 2a\left(x_2 - x_0\right) \qquad (4)$$

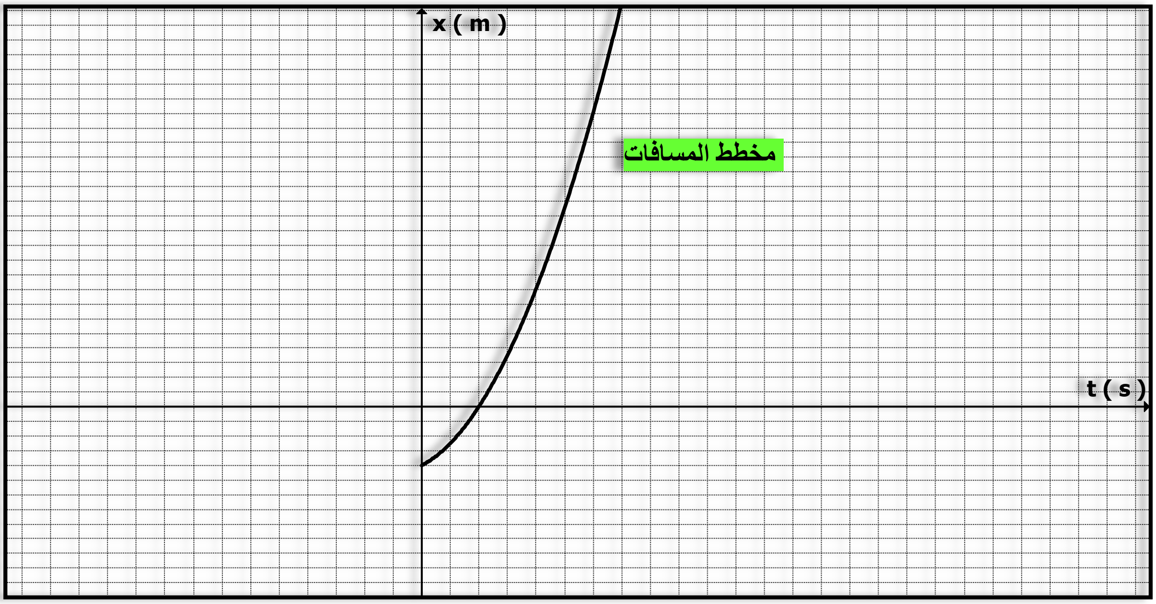
بطرح المعادلتين (3) و (4) نحصل على :

$$\boxed{V_2^2 - V_1^2 = 2a\left(x_2 - x_1\right)}$$

أمثلة لمخططات الحركة المستقيمية المتغيرة بانتظام






x (m)
t (s)
مخطط المسافات