

أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مادة الرياضيات	الأستاذ : عثمانى نجيب مذكرة رقم 12/
--------------------------------------	----------------	--

مستوى : السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 12 في درس الجداء السلمي

القدرات المنتظرة

- التعبير و البرهنة على تعامد متجهتين
- التعبير متجهيا و تحليليا عن التعامد و خاصياته
- تحديد مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه
- تحديد المستقيم المار من نقطة و العمودي على مستوى
- تحديد معادلة ديكارتية لفلكة محددة بمركزها و شعاعها
- تحديد تمثيل باراميتري لفلكة

- التعرف على مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

محتوى الدرس

- الجداء السلمي في الفضاء و خاصياته:
- الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم
- المستوى المحدد بنقطة و متجهة منظمية عليه
- مسافة نقطة عن مستوى
- دراسة تحليلية للفلكة:
- دراسة مجموعة النقط بحيث: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$
- تقاطع فلكة و مستقيم:
- تقاطع فلكة و مستوى:
- معادلة ديكارتية لمستوى مماس لفلكة في نقطة معلومة:

■ منظم المتجهة $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي الموجب: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u^2}$

خاصية: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا , لدينا:

$$\left. \begin{aligned} \leftarrow \text{التماثلية: } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \leftarrow \text{الخطائية: } \left. \begin{aligned} (k\vec{u}) \cdot \vec{v} &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

2. تعامد متجهتين:

تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء. نقول إن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, و نكتب: $\vec{u} \perp \vec{v}$

مثال:

مكعب ABCDEFGH

لدينا: $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان أي $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ (لأن (AE) عمودي على المستوى (ABC))

و بما أن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ فإن $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ أي $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BF}$

II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد

منظم

(1) المعلم و الأساس المتعامدان المنظمان:

I. الجداء السلمي في الفضاء و خاصياته:

1. تعريف:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, A و B و C ثلاث نقط من الفضاء بحيث: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ يوجد على الأقل مستوى (P) يمر من النقط A و B و C .

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ في المستوى (P) , و نرمز له بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

ملحوظة: جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمتد إلى الفضاء.

نتائج: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, A و B و C ثلاث نقط من الفضاء بحيث: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

■ إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فإن:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos BAC$$

■ إذا كانت $\vec{u}$ غير منعدمة فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ حيث H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

ملحوظة:

■ الجداء السلمي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ يرمز له بالرمز u^2 , و يسمى المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$

تعريف: ليكن $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ أساسا في الفضاء و O من الفضاء

نقول إن $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان:

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad \text{و} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

نقول إن $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ممنظم إذا كان أساسا

متعامدا ممنظما

فيما تبقى من فقرات الدرس, ننسب الفضاء إلى معلم متعامد ممنظم

(2) خاصية:

إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ متجهتين من

الفضاء فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

مثال: $\vec{u}(1; 5; -1)$ و $\vec{v}(-5; 1; 0)$

هل المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين ؟

الجواب: نحسب الجداء السلمي :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5) \times 1 + 1 \times 5 + 0 \times (-1) = (-5) + 5 = 0$$

ومنه : $\vec{u} \perp \vec{v}$

(3) منظم متجهة

خاصية: إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فإن منظم المتجهة $\vec{u}$ هو:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مثال: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$ أحسب $\|\vec{u}\|$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

(4) المسافة بين نقطتين:

خاصية: لتكن $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتين من

الفضاء

المسافة بين النقطتين A و B هي:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

تمرين 1: $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر للفضاء

$\vec{u}(3; -2; 1)$, $\vec{v}(2; 1; 0)$ احسب : $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$

$$\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{70}}$$

الجواب:

(5) تحديد تحليلي لمجموعة النقط M من الفضاء بحيث:

$$\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$$

خاصية: لتكن A نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a; b; c)$ متجهة غير منعدمة

و k عددا حقيقيا

مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$ هي مستوى

معادلته تكتب على شكل $ax + by + cz + d = 0$, حيث d عدد

حقيقي

مثال: نعتبر النقطة $A(1; -1; 2)$ و المتجهة $\vec{u}(2; 1; -1)$

حدد (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u} \cdot \vec{AM} = -1$

الجواب: لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء

$$\text{لدينا: } M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{AM} = -1$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) + (y+1) - (z-2) = -1$$

$$. \Leftrightarrow 2x + y - z + 2 = 0 \quad \text{هذه المعادلة تكتب على الشكل:}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

إذن المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته:

$$2x + y - z + 2 = 0$$

III. المستوى المحدد بنقطة و متجهة منظميه عليه:

(1) متجهة منظميه على مستوى:

تعريف: ليكن (P) مستوى في الفضاء.

نسمي متجهة منظميه على المستوى (P) كل متجهة $\vec{n}$ غير منعدمة

يكون اتجاهها عموديا على المستوى (P) .

نتيجة: المتجهة $\vec{n}$ منظميه على المستوى (P) إذا وفقط إذا كانت $\vec{n}$

متعامدة مع متجهتين للمستوى (P) .

(2) خاصية: لتكن a و b و c و أعدادا حقيقية بحيث

$$(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

مجموعة النقط $d M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$ax + by + cz + d = 0$$

هي مستوى و المتجهة $\vec{n}(a; b; c)$ متجهة منظميه عليه.

أمثلة : حدد متجهة منظمية على المستوى (P) في الحالات التالية :

$$(1) \quad (P) \quad 2x - 3y + z + 10 = 0 \quad (2) \quad (P) \quad 3x - z + 1 = 0$$

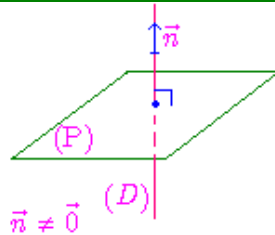
$$(3) \quad (P) \quad y + z + 1 = 0 \quad (4) \quad (P) \quad z = 2$$

$$(5) \quad (P) \quad x - 2y + 7z - 3 = 0 \quad (6) \quad (P) \quad 2y - z + 11 = 0$$

$$\text{أجوبة: (1) } \vec{n}(2; -3; 1) \quad (2) \quad \vec{n}(3; 0; -1) \quad (3) \quad \vec{n}(0; 1; 1)$$

$$(4) \quad \vec{n}(0; 0; 1) \quad (5) \quad \vec{n}(1; -2; 7) \quad (6) \quad \vec{n}(0; 2; -1)$$

(3) معادلة مستوى المحدد بنقطة و متجهة منظميه عليه:



خاصية: لتكن $\vec{n}(a; b; c)$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من

الفضاء.

المستوى (P) المار من النقطة A و متجهة منظميه عليه, هو

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

و معادلة ديكارتية له تكتب على شكل: $ax + by + cz + d = 0$,

حيث d عدد حقيقي.

مثال: نعتبر في الفضاء المتجهة $\vec{n}(1; 2; 1)$ و النقطتين $A(-1; 0; 2)$

و $B(3; 1; 0)$.

تمرين 2: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المحدد بمتجهه منظمه عليه $A(-5; 2; -1)$ و $\vec{n}(2; 1; -2)$ متجهه منظمه عليه

الجواب: نعتبر : $M(x; y; z) \in (P)$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow 2(x+5) + (y-2) - 2(z+1) = 0$$

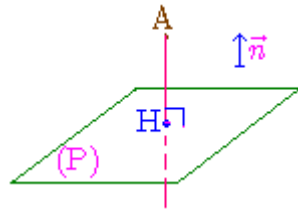
$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 6 = 0$$

ومنه : $(P) : 2x + y - 2z + 6 = 0$

IV. مسافة نقطة عن مستوى:

تعريف: ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء و H المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) .

المسافة AH تسمى مسافة النقطة A عن المستوى (P) , و يرمز لها بالرمز $d(A; (P))$.



خاصية: ليكن (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و

$A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من الفضاء.

مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي:

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال: نعتبر في الفضاء النقطة $A(5; 1; 0)$ و المستوى (P) الذي

$$x + 2y + 2z - 6 = 0$$

أحسب : $d(A; (P))$

$$d(A; (P)) = \frac{|5 + 2 \times 1 + 2 \times 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1|}{3} = \frac{1}{3}$$

تمرين 3: $(P) : -3x + 2y + z + 2 = 0$

ليكن : $(D) \perp (P)$ و $B(-2; 2; 3) \in (D)$

1) احسب : $d(B; (P))$ **2) حدد تمثيلا بارامتريا ل (D)**

$$d(B; (P)) = \frac{|-3 \times (-2) + 2 \times 2 + 3 + 2|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{14}}$$

2) لدينا : $(P) : -3x + 2y + z + 2 = 0$

إن : $\vec{n}(-3; 2; 1)$ متجهه منظمه على (P)

و بما أن : $(D) \perp (P)$ فإن :

$\vec{n}(-3; 2; 1)$ متجهه موجهة ل (D)

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة A و $\vec{n}$ متجهه منظمه عليه.

2) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة B و العمودي على المستوى (P) .

3) حدد متلوث إحداثيات النقطة B' المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P) .

أجوبة: 1) تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (P) :

طريقة 1: $M(x; y; z) \in (P)$ يعني $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

يعني $\overrightarrow{AM}(x+1; y; z-2)$

$$(x+1) \times 1 + y \times 2 + 1 \times (z-2) = 0$$

يعني $x+1+2y+z-2=0$ يعني $x+2y+z-1=0$ (P)

طريقة 2: نعلم أن معادلة مستوى تكتب على الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0$$

و نعلم أن $\vec{n}(1; 2; 1)$ متجهه منظمه عليه إذن :

$$a=1 \text{ و } b=1 \text{ و } c=1$$

ومنه : $(P) : 1x + 2y + 1z + d = 0$

و نعلم أن : $A(-1; 0; 2) \in (P)$ إذن احداثيات A تحقق المعادلة :

$$d = -1 \text{ يعني } (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 2 + d = 0$$

وبالتالي : $(P) : x + 2y + z - 1 = 0$

2) تحديد تمثيل بارامتريا للمستقيم (D) :

(D) يمر من النقطة B و عمودي على المستوى (P) .

إذن : $\vec{n}(1; 2; 1)$ متجهه موجهة ل (D) و $B(3; 1; 0) \in (D)$

$$\text{إذن : } \begin{cases} x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases} \text{ حيث } k \in \mathbb{R} \text{ وهو تمثيل بارامتريا للمستقيم } (D)$$

3) B' هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P) .

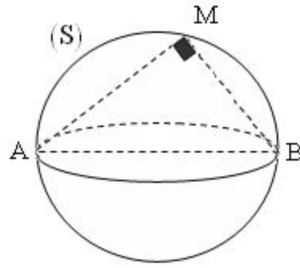
إذن : $B' \in (P)$ و $B' \in (D)$

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases} \text{ ومنه نحل النظام التالية :}$$

$$6k + 4 = 0 \text{ يعني } k + 3 + 2(2k + 1) + k - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \\ z = -\frac{2}{3} + 0 \end{cases} \text{ يعن ي } k = -\frac{2}{3} \text{ ومنه :}$$

$$B'\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ ومنه :}$$



مثال: حدد معادلة ديكارتية للكرة (S) التي أحد أقطارها [AB]

$$A(1;0;-1) \text{ و } B(1;2;-1)$$

الجواب: طريقة 1

مركزها Ω هو منتصف القطعة [AB]

$$\Omega(1;1;-1) \text{ إذن: } \Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (0)^2}}{2} = 1$$

ولدينا أيضا : $R=1$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1^2$$

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

طريقة 2: نستعمل الخاصية: $A(1;0;-1)$ و $B(1;2;-1)$

$$B(1;2;-1)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \text{ يعني } M \in (S)$$

$$\overrightarrow{MA}(1-x;0-y;-1-z) \text{ لدينا و } \overrightarrow{MB}(1-x;2-y;-1-z)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$(1-x) \times (1-x) + (-y)(2-y) + (-1-z)(-1-z) = 0$$

$$(1-x)^2 + (-y)(2-y) + (-1-z)^2 = 0 \text{ يعني}$$

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

VI. دراسة مجموعة النقط بحيث:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

خاصية: لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية بحيث

$$(a;b;c) \neq (0;0;0) \text{ و } S \text{ مجموعة النقط } M(x;y;z) \text{ من الفضاء}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \text{ التي تحقق المعادلة:}$$

تكون (S) كرة إذا وفقط إذا كان: $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$

مركز هذه الكرة هو النقطة $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$ و شعاعها هو:

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$$

إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$ فإن (S) هي المجموعة

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

$$\text{حيث } A(x_A; y_A; z_A) \text{ و } B(x_B; y_B; z_B)$$

و لدينا: $B(-2;2;3) \in (D)$

$$(D) : \begin{cases} x = -3t - 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{إذن:}$$

V. دراسة تحليلية للكرة:

(1) تعريف:

لتكن Ω نقطة من الفضاء و R عددا حقيقيا موجبا قطعاً.

الكرة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R هي مجموعة النقط M من

الفضاء التي تحقق: $\Omega M = R$.

نرمز لهذه الكرة بالرمز $S(\Omega; R)$

(2) معادلة ديكارتية للكرة محددة بمركزها و شعاعها:

خاصية: معادلة ديكارتية للكرة (S) التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ و

شعاعها $R (R > 0)$ هي:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

و نكتب أيضا: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ حيث:

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

مثال: حدد معادلة ديكارتية للكرة (S) في الحالات التالية:

(1) (S) مركزها $\Omega(1;2;-3)$ و شعاعها $R = 4$.

(2) (S) مركزها $\Omega(0;-1;1)$ و تمر من النقطة $A(1;2;-1)$

أجوبة: (1) (S) مركزها $\Omega(1;2;-3)$ و شعاعها $R = 4$.

$$\text{إذن: } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0 \text{ يعني:}$$

وهي نكتب على الشكل التالي: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

(2) (S) مركزها $\Omega(0;-1;1)$ و تمر من النقطة $A(1;2;-1)$

يعني: $\Omega A = R$

نحسب المسافة ΩA :

$$R = \Omega A = \sqrt{(1-0)^2 + (2+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

ومنه: معادلة ديكارتية للكرة هي:

$$(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{14})^2$$

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 12 = 0$$

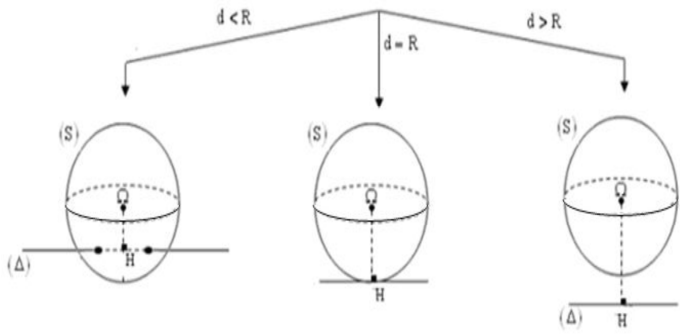
خاصية: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي الكرة

التي أحد أقطارها [AB]، و معادلة ديكارتية لها هي:

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

$$\text{حيث } A(x_A; y_A; z_A) \text{ و } B(x_B; y_B; z_B)$$



ليكن (D) مستقيما من الفضاء معرفا بتمثيل بارامتري و (S) فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية، لندرس ثلاث أمثلة نحدد من خلالها الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S) .

مثال 1: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$$

و (D) المستقيم المار من $A(0; 5; 1)$ و $\vec{n}(2; 1; -2)$ متجهة موجهة له

(1) حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (D)

(2) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

الجواب (1): تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

(2) نحل النظام التالية :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0 \\ x = 2t \\ y = 5 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$(2t)^2 + (5+t)^2 + (1-2t)^2 + 6 \times 2t - 4(5+t) - 2(1-2t) + 5 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \text{ يعني } 9t^2 + 18t + 9 = 0$$

$$\text{لدينا: } \Delta = 0 \text{ اذن للمعادلة حل حقيقي مزدوج } t = -\frac{b}{2a} = -1$$

نعوض $t = -1$ في التمثيل البارامتري ل (D)

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4; \\ z = 3 \end{cases} \text{ فنجد : ومنه هناك نقطة وحيدة مشتركة بين } (D) \text{ و } (S)$$

هي: $T(-2; 4; 3)$

في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) نقطة وحيدة مشتركة هي

T

نقول إن المستقيم (D) مماس للفلكة (S) في النقطة T .

■ إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$ فإن (S) هي

$$(S) = \left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \right) \right\}$$

أمثلة: حدد مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق المعادلات التالية:

$$(E_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 6z + 6 = 0 \quad (1)$$

$$(E_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 6 = 0 \quad (2)$$

$$(E_3): x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z + \frac{9}{2} = 0 \quad (3)$$

أجوبة (1): $(E_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 6z + 6 = 0$

على الشكل : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا : $a = -6$ و $b = 4$ و $c = -6$ و $d = 6$

نحسب : $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 36 + 16 + 36 - 24 = 64 > 0$$

ومنه : (E_1) فلكة مركزها $\Omega \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2} \right)$ أي $\Omega(3; -2; 3)$

$$R = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ أي } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$$

$$(E_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 6 = 0 \quad (2)$$

على الشكل : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا : $a = -4$ و $b = 2$ و $c = 2$ و $d = 6$

نحسب : $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 16 + 4 + 4 - 24 = 0$$

ومنه : (E_2) هي النقطة $\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \right)$ أي $(E_2) = \{ \Omega(2; -1; -1) \}$

$$(E_2) = \{ \Omega(2; -1; -1) \}$$

$$(E_3): x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z + \frac{9}{2} = 0 \quad (3)$$

على الشكل : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا : $a = -1$ و $b = 3$ و $c = 2$ و $d = \frac{9}{2}$

نحسب : $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 1 + 9 + 4 - 18 = -4 < 0$$

ومنه : (E_3) هي المجموعة الفارغة.

VII. تقاطع فلكة و مستقيم:

(S) فلكة و (D) مستقيم

(S) و (D) يكونان إما منفصلين أو متقاطعين في نقطة أو في نقطتين

مثال 2: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ و (D) المستقيم المعروف بما يلي:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

الفلكة (S)

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

الجواب :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

نحل النظام التالية :

$$\begin{aligned} (-1+2t)^2 + (2-2t)^2 + (-1+t)^2 - 4(-1+2t) - 2(2-2t) - 1 &= 0 \\ 9t^2 - 18t + 5 &= 0 \end{aligned}$$

اذن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما: $t_1 = \frac{1}{3}$ و $t_2 = \frac{5}{3}$

نعوض $t = \frac{1}{3}$ و $t = \frac{5}{3}$ في التمثيل البارامترى ل (D) فنجد نقطتين:

$$A\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ و } B\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) لهما

نقطتان مشتركتان هما A و B, نقول:

إن المستقيم (D) قاطع للفلكة (S).

مثال 3: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0$ و (D) المستقيم المعروف بما يلي:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

(S)

الجواب :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

نحل النظام التالية :

$$\begin{aligned} 0^2 + t^2 + t^2 - 2 \times 0 + 4t - 2t + 4 &= 0 \\ 2t^2 + 2t + 4 &= 0 \end{aligned}$$

لدينا: $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$ يعني $t^2 + t + 2 = 0$

اذن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

ومنه المستقيم (D) يوجد خارج الفلكة (S) يعني :

$$(S) \cap (D) = \emptyset$$

تمرين 4: $A(1; 1; -2)$ و $\vec{u}(-3; 2; 1)$

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

أدرس تقاطع المستقيم : $(A; \vec{u})$ و (S)

الجواب : $M(x; y; z) \in (D) \cap (S)$

نبحث عن : تمثيل بارامترى ل (D) :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

$$\text{اذن: } (1 - 3t)^2 + (1 + 2t)^2 + (-2 + t)^2 = 6$$

$$\text{يعني: } 14t^2 - 6t + 6 = 6 \text{ يعني } 14t^2 - 6t = 0$$

$$\text{يعني: } t(7t - 3) = 0 \text{ يعني: } t = 0 \text{ أو } t = \frac{3}{7}$$

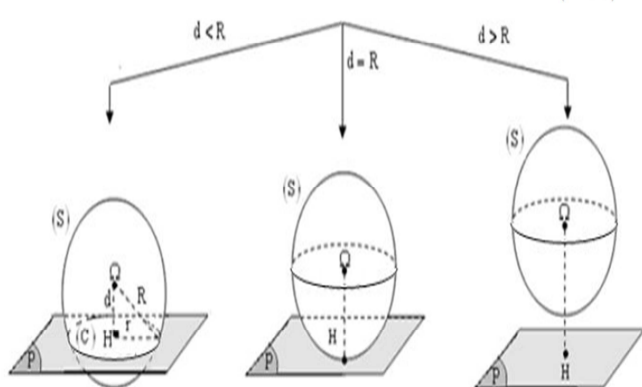
$$\text{ومنه: } M\left(\frac{-2}{7}; \frac{13}{7}; -\frac{13}{7}\right) ; M(1; 1; -2)$$

$$\text{اذن: } (D) \cap (S) = \left\{ A(1; 1; -2) ; B\left(\frac{-2}{7}; \frac{13}{7}; -\frac{13}{7}\right) \right\}$$

VIII. تقاطع فلكة و مستوى:

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

$$\text{نضع: } d = \Omega H = d(\Omega; (P))$$



المستوى (P) يقطع
الفلكة (S) وفق دائرة (C)
مركزها: H
شعاعها: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

المستوى (P) مماس
للفلكة (S)
في النقطة H

المستوى (P)
لا يقطع الفلكة (S)

لتكن (S) فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية, و (P) مستوى من الفضاء معرفة بمعادلة ديكارتية, لندرس ثلاث أمثلة نستنتج من خلالها الوضع النسبي للمستوى (P) و الفلكة (S).

مثال 1: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$2x + y + 2z - 3 = 0$$

(1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

(2) أحسب : $d(\Omega; (P))$ وتأكد أن (P) يقطع الفلكة في نقطة

وحيدة T

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على

(P)

(4) استنتج احداثيات T نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (P)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad \text{اجوبة : 1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad \text{على الشكل :}$$

$$d = -1 \text{ و } c = 2 \text{ و } b = -2 \text{ و } a = 2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 > 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 > 0$$

$$\text{ومنه : } (S) \text{ فلكة مركزها } \Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) \text{ أي } \Omega(-1; 1; -1)$$

$$R = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{أي } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$$

$$2x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{و } \Omega(-1; 1; -1)$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2 \times (-1) + 1 + 2 \times (-1) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-6|}{3} = \frac{6}{3} = 2 = R$$

ومنه : (P) يقطع الفلكة في نقطة وحيدة T

نقول (P) مماس للفلكة (S) في T

(3) (Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن : $\vec{n}(2; 1; 2)$

متجهة منظمية على (P)

$$\text{اذن تمثيل بارامتري ل } (\Delta) \text{ هو : } \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1t + 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

$$T(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P) \quad (4)$$

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1t + 1; (t \in \mathbb{R}) \text{ و } (P) \quad 2x + y + 2z - 3 = 0 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

$$2(2t - 1) + (t + 1) + 2(2t - 1) - 3 = 0$$

$$\text{يعني } 9t - 6 = 0 \text{ يعني } t = \frac{2}{3} \text{ وبالتعويض في التمثيل البارامتري}$$

نجد

$$\begin{cases} x = 2 \times \frac{2}{3} - 1 \\ y = 1 \times \frac{2}{3} + 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \times \frac{2}{3} - 1 \end{cases} \quad \text{ومنه : } T\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ نقطة التماس}$$

مثال 2: لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(2; 0; 1)$ شعاعها

$$R = 3 \text{ والمستوى } (P) \text{ المعرف}$$

$$x - 2y + z + 3 = 0$$

(1) حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S)

(2) أحسب : $d(\Omega; (P))$ وتأكد أن (P) يقطع الفلكة وفق دائرة

(C) يتم تحديد شعاعها r

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على

(P)

(4) استنتج احداثيات H مركز الدائرة (C)

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 = 3^2 \quad \text{اذن : 1 اجوبة :}$$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد :

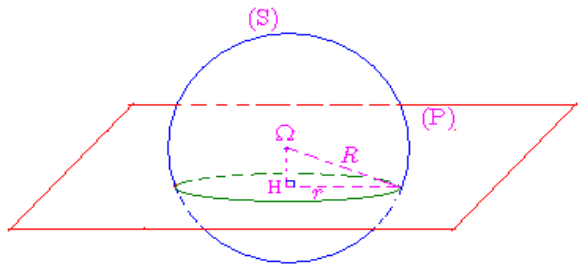
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z - 4 = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$\Omega(2; 0; 1) \text{ و } x - 2y + z + 3 = 0$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < R = 3$$

ومنه : (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C)



نلاحظ أننا نحصل على مثلث قائم الزاوية في H

$$\text{ومنه حسب فيثاغورس فان : } r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$r = \sqrt{3^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}$$

$$\Omega(2; 0; 1) \text{ و } (P) \quad x - 2y + z + 3 = 0$$

(Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن : $\vec{n}(1; -2; 1)$

متجهة منظمية على (P)

$$\text{اذن تمثيل بارامتري ل } (\Delta) \text{ هو : } \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = -2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1t + 1 \end{cases}$$

$$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P) \quad (4)$$

$$\begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = -2t; (t \in \mathbb{R}) \text{ و } (P) \quad x - 2y + z + 3 = 0 \\ z = 1t + 1 \end{cases}$$

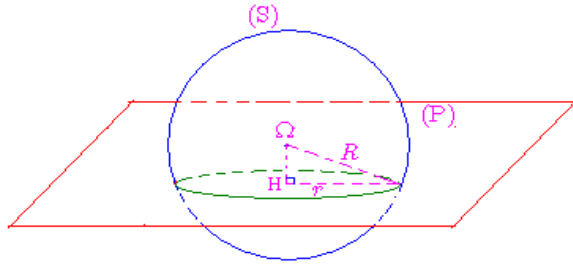
$$(t + 2) - 2(-2t) + (t + 1) + 3 = 0$$

$$\text{يعني } 6t + 6 = 0 \text{ يعني } t = -1 \text{ وبالتعويض في التمثيل البارامتري}$$

نجد

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2+6-1+3|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|10|}{3} = \frac{10}{3} < R=4$$

ومنه : (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C)



$$r = \sqrt{4^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{100}{9}} = \sqrt{\frac{44}{9}} = \frac{\sqrt{44}}{3} = \frac{2\sqrt{11}}{3}$$

$$\Omega(1; -3; -1) \text{ و } (P): 2x - 2y + z + 3 = 0 \quad (3)$$

(Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن : $\vec{n}(2; -2; 1)$ متجهة منظمية على (P)

$$(\Delta) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t - 3; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1t - 1 \end{cases}$$

$$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P) \quad (4)$$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t - 3 \text{ و } (P): 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ z = 1t - 1 \end{cases}$$

$$\text{اذن : } 2(2t + 1) - 2(-2t - 3) + (t - 1) + 3 = 0$$

$$\text{يعني } 9t + 10 = 0 \text{ يعني } t = -\frac{10}{9} \text{ وبالتعويض في التمثيل}$$

البارامترى نجد

$$(C) \begin{cases} x = -\frac{11}{9} \\ y = -\frac{7}{9} \\ z = -\frac{19}{9} \end{cases} \text{ ومنه : } H\left(-\frac{11}{9}; -\frac{7}{9}; -\frac{19}{9}\right) \text{ مركز الدائرة}$$

خاصية: يكون مستوى (P) مماسا للفلكة $S(\Omega; R)$ إذا وفقط إذا كان $d(\Omega; (P)) = R$.

IX. معادلة ديكارتية لمستوى مماس لفلكة في نقطة معلومة:

خاصية: لتكن (S) فلكة مركزها Ω و A نقطة من الفلكة (S) يوجد مستوى وحيد (P) مماس للفلكة (S) عند النقطة A ،

و هو المستوى العمودي على المستقيم (AΩ) في النقطة A ، أي

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2 \\ y = -2(-1) \\ z = -1 + 1 \end{cases} \text{ ومنه : } H(1; 2; 0) \text{ مركز الدائرة (C)}$$

مثال 3: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \text{ , و المستوى (P)}$$

الذي معادلته الديكارتية هي: $x + y - z + 2 = 0$

(1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

(2) أحسب : $d(\Omega; (P))$ ماذا تستنتج ؟

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \quad \text{اجوبة : (1)}$$

على الشكل : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا : $a = -2$ و $b = 0$ و $c = 0$ و $d = 0$

$$\text{نحسب : } a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 > 0$$

ومنه : (S) فلكة مركزها $\Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ أي $\Omega(1; 0; 0)$

$$\text{و شعاعها هو : } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \text{ أي : } R = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Omega(1; 0; 0) \text{ و } x + y - z + 2 = 0 \quad (2)$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|1+2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} > R=1$$

ومنه : (P) يوجد خارج الفلكة (S) أو لا يقطع الفلكة

تمرين 5: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z = 5$$

والمستوى (P) المعرف بـ $2x - 2y + z + 3 = 0$

(1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

(2) بين أن (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C) يتم تحديد شعاعها r

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P)

(4) استنتج احداثيات H مركز الدائرة (C)

$$\text{اجوبة : (1)} \quad (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z = 5$$

على الشكل : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا : $a = -2$ و $b = 6$ و $c = 2$ و $d = -5$

$$\text{نحسب : } a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 64 > 0$$

ومنه : (S) فلكة مركزها $\Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ أي $\Omega(1; -3; -1)$

$$\text{و شعاعها هو : } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \text{ أي : } R = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Omega(1; -3; -1) \text{ و } (P): 2x - 2y + z + 3 = 0 \quad (2)$$

مثال:

$$S(\Omega; R) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = 5$$

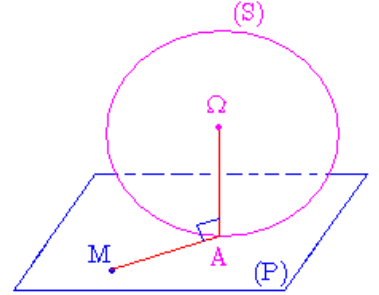
(1) بين أن : $A(2; -1; 0) \in (S)$

(2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس ل (S) في A

الجواب :

(1) نعوض باحداثيات في معادلة الفلكة ونجد أنها تحقق المعادلة

$$(S) : 2^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2 \times 2 + 4 \times (-1) - 6 \times 0 = 5$$



$$S(\Omega; R) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = 5 \quad (2)$$

نحدد مركز الفلكة : $a = 2$ و $b = 4$ و $c = -6$

ومنه : (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$ أي : $\Omega(-1; -2; 3)$

لتكن : $M(x; y; z)$ و $A(2; -1; 0)$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ يعني $M(x; y; z) \in (P)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-3; -1; 3)$ و $\overrightarrow{AM}(x-2; y+1; z)$

يعني $-3(x-2) - (y+1) + 3z = 0$

يعني $(P) -3x - y + 3z + 5 = 0$

تمرين 6: نعتبر الفلكة (S) التي مركزها $A(2; -1; 1)$ و شعاعها 6

(1) بين أن : $B(-2; 3; -1) \in (S)$

(2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس ل (S) في B