

الجاء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

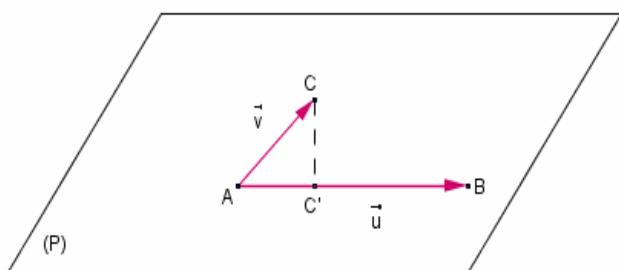
I- الجاء السلمي 1- تعريف

لتكن \vec{v} و \vec{u} متجهتين من الفضاء، و A و B و C نقط من الفضاء حيث $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ يوجد على الاقل مستوى (P) ضمن الفضاء يمر من النقط A و B و C .
الجاء السلمي للمتجهتين \vec{v} و \vec{u} في الفضاء هو الجاء السلمي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ في المستوى (P) نرمز له بـ $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

ملحوظة
جميع خصيات الجاء السلمي في المستوى تمدد إلى الفضاء

2- نتائج

لتكن \vec{v} و \vec{u} متجهتين من الفضاء، و A و B و C نقط من الفضاء



حيث $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

* إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

* إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

* إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

حيث \vec{C} المسقط العمودي لـ \vec{v} على (AB)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

3- منظم متوجهة

لتكن \vec{u} متجهة و A و B نقطتين من الفضاء حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ يسمى المربع السلمي لـ \vec{u} ويكتب $\vec{u}^2 = AB^2$

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة \vec{u} نكتب $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

ملاحظة و كتابة

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 *$$

* إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

4- خصائص

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

متطابقات هامة

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in V_3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} *$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} *$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} *$$

$$\vec{u} \cdot \alpha \vec{v} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) *$$

5- تعامد متوجهتين : تعريف

لتكن \vec{v} و \vec{u} متجهتين من الفضاء V_3 .

تكون \vec{v} و \vec{u} تعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$ نكتب $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ملاحظة المتتجهة $\vec{0}$ عمودية على أي متجهة من الفضاء V_3

تمرين

المكعب ABCDEFGH الذي طول حرفه a
 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$
أحسب

لتكن \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ثلات متجهات غير مستوائية من الفضاء V_3 و O نقطة من الفضاء.

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ أساس للفضاء V_3

يكون الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد (أو المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} متعامدة مثنى مثنى.

يكون الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد و منظم (أو المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ تعامد و منظم) إذا وفقط إذا كانت المتجهات \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} متعامدة مثنى مثنى و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

2- الصيغة التحليلية للحداء السلمي

أ- خاصة

الفضاء منسوب إلى معلم.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

إذا كانت $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ فان $\vec{u}(x; y; z)$ $\vec{v}(x'; y'; z')$

ملاحظة إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ فان

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = x ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = y ; \quad \vec{u} \cdot \vec{k} = z$$

ب- الصيغة التحليلية لمنظم متوجهة و لمسافة بين نقطتين

*- إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ فان $\vec{u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

*- إذا كانت $B(x_B; y_B; z_B)$ و $A(x_A; y_A; z_A)$ بالنسبة للمعلم.م.م

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

تمرين

$$C(-1; -1; -\sqrt{2}) \text{ و } B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0) \text{ و } A(1; 1; \sqrt{2})$$

نعتبر بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

3- تحديد تحليلي لمجموعة النقط M من الفضاء بحيث

لتكن $\vec{u}(a; b; c)$ متوجهة غير منعدمة و $A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من الفضاء

نعتبر $M(x; y; z)$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MA} = k \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

خاصية

لتكن $\vec{u}(a; b; c)$ متوجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MA} = k$ هي مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ حيث d عدد حقيقي

مثال نعتبر $\vec{u}(2; -1; 1)$ و $\vec{u}(-1; 2; 1)$ نقطتين من الفضاء

حدد مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MA} = -1$

III- تطبيقات الحداء السلمي في الفضاء

1- تعامد المستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- تعامد مستقيمين

ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمين من الفضاء موجهين بالمتجهتين \vec{u}_1 و \vec{u}_2 على التوالي

$$(D_1) \perp (D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

ب- تعامد مستقيم و مستوى

خاصية

ليكن (P) مستوى موجه بالمتجهتين \vec{u}_1 و \vec{u}_2 و (D) مستقيم موجه بالمتجهة \vec{u}_3

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_3 \text{ و } \vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$$

ج- ملاحظات واصطلاحات

- * المتجهة \vec{u} الموجه لمستقيم (D) العمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منتظمة لمستوى (P).
 - * اذا كانت \vec{u} منتظمة لمستوى (P) فان كل متجهة \vec{v} مستقيمية مع \vec{u} تكون منتظمة لمستوى (P)
 - * اذا كانت \vec{u} منتظمة لمستوى (P) و \vec{v} منتظمة لمستوى (P') وكانتا \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين فان (P) و (P') متوازيان
 - * إذا كان $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ و \vec{u} منتظمة لمستوى (P) فان $(A; B) \in (P)^2$

تمرين في الفضاء المنسوب إلى معلم .م. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ حدد تمثيل بارامטרי للمستقيم (D) المار من $A(-1; 2; 0)$ و العمودي على المستوى (P) الموجه بالتجهيزين $\vec{v}(2; 1; -1)$ و $\vec{u}(1; -1; 1)$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم M . $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}; \vec{O})$ نعتبر المستوى

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + bt \end{cases} \quad t \in IR$$

(P) الذي معادلته $ax-2y+z-2=0$ و المستقيم (D) تمثيله يارامترى

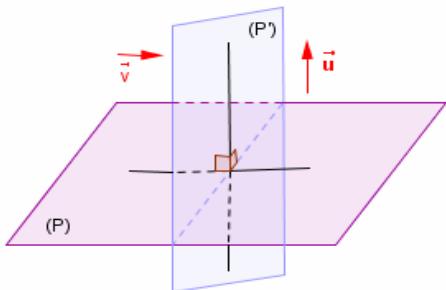
- 1 حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)
 -2 حدد a و b لكي يكون $(D) \perp (P)$

د- تعامد مستوین

تذكير يكون مستويان متعمدين اذا و فقط اذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

خاصة

ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء و \vec{u} و \vec{v} متجهتين منظمتين لهما على التوالي
 $\vec{u} \perp (P)$ اذا وفقط اذا كان $\vec{v} \perp (P)$



2- معادلة مستوى محدد بنقطة و متوجهة منتظمة عليه

a. مستوى محدد بنقطة و متوجهة منتظمة عليه

مبرهنة

لتكن \bar{u} مترجمة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء

* المستوى المار من A و المتجهة \vec{u} منتظمة له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث $0 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

* مجموعة النقاط M من الفضاء حيث $0 = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$ المستوى المار من A و المتوجه \vec{u} منتظمة له

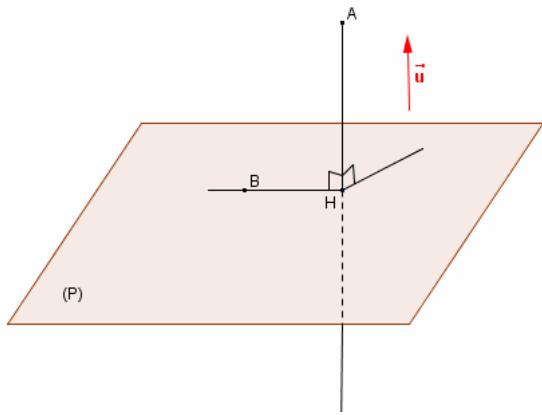
b. معادلة مستوى محدد بنقطة و متوجه منتظمة عليه خاصة

- * كل مستوى (P) في الفضاء $\bar{u}(a;b;c)$ منظمية عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع $ax + by + cz + d = 0$
- * كل معادلة ديكارتية من نوع $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ هي معادلة مستوى (P) في الفضاء بحيث $\bar{u}(a;b;c)$ منظمية عليه

تمرين

$$(D): \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \quad (P) : 2x-y+3z+1=0 \quad \text{نعتبر}$$

- 1 حدد متجهة \vec{u} منتظمة على (P) ونقطة منه.
 - 2 حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $(2;0;3)$ A و $(1,2,\bar{n})$ منتظمه عليه.
 - 3 حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $(2;0;3)$ A' والعمودي على (D)
 - 4 حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $(2;0;3)$ A و الموازي ل (P)



الفضاء منسوب إلى معلم.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
مسافة نقطة A عن مستوى P هي المسافة AH
حيث H المسقط العمودي لـ A على P نكتب

$$d(A; P) = AH = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

حيث P و \vec{u} منتظمية على P

2- خاصية

ليكن P مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ نقطة من الفضاء

$$d(A; P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال

ليكن P مستوى مار من $A(1; 2; 0)$ و $B(2; 1; 3)$ منتظمية عليه لتكن

$$\text{حدد } d(A; P)$$

تمرين 1

في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم .

نعتبر $A(-1; 1)$ و $B(3; 1; -1)$ و P المستوى ذا المعادلة $2x - 3y + 2z = 0$ و D المستقيم الممثل

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى Q المار من A والعمودي على المستقيم D

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى Q' المار من B والعمودي على المستوى P

3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى Q' المار من B و الموازي للمستوى P

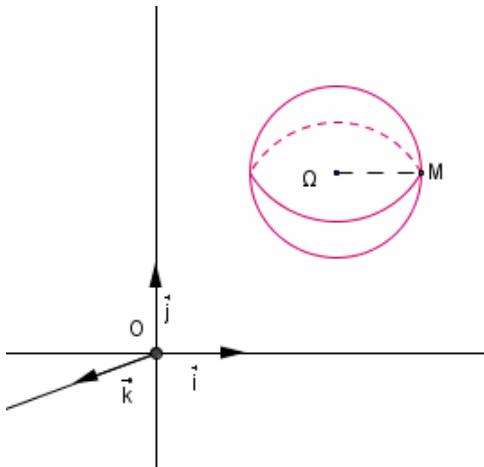
تمرين 2

في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم.

نعتبر المستوى P ذو المعادلة $3x + 2y - z - 5 = 0$ و D المستقيم المعرف بـ

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم D
حدد معادلة ديكارتية للمستوى Q الذي يتضمن D و العمودي على P



-IV- معادلة فلكة

الفضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

معادلة فلكة معرفة مركزها وشعاعها

لتكن $\Omega(a; b; c)$ نقطة من الفضاء E و $S(\Omega; r)$ الفلكة
التي مركزها Ω و شعاعها r

ليكن $M(x; y; z)$ من الفضاء E

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow M \in S(\Omega; r)$$

الفضاء المنسوب إلى معلم متعمد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
 معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega; r)$ التي مركزها $\Omega(a; b; c)$ وشعاعها r
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ هي

ملاحظات وأصطلاحات

- * إذا كان A و B نقطتين من الفلكة $S(\Omega; r)$ حيث Ω منتصف $[A; B]$ فان قطرها للفالكة $r = \frac{1}{2} AB$ وشعاعها $\Omega(a; b; c)$ منتصف $[A; B]$ وشعاعها $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ حيث α و β و γ و δ أعداد حقيقية.

* **الفلكة** $S(O; r)$ حيث O أصل المعلم معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

* **الكرة** لتكن $S(\Omega; r)$ فلكة التي مركزها $\Omega(a; b; c)$ وشعاعها r

الكرة $B(\Omega; r)$ التي مركزها $\Omega(a; b; c)$ وشعاعها r هي مجموعة النقط $M(x; y; z)$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq r^2$$

معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها

فلكرة أحد أقطارها $[A; B]$ زاوية قائمة أو $M = A$ أو $M = B \Leftrightarrow M \in S$

مréhne

وB نقطتان مختلفان في الفضاء

في الفضاء مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ هي فلكة التي أحد أقطارها $[A; B]$

خاصية

إذا كانت $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتين مختلفتين فإن معادلة الفلكة التي أحد أقطارها $[A; B]$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعمد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر $(\Omega; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و المار من A(4;1;2) و B(2;1;2) ، $\Omega(-1;1;2)$ و $\Omega(1;2;-1)$.

-1- حدد معادلة ديكارتية للفلكة S التي مركزها Ω و المار من A

-2- حدد معادلة ديكارتية للفلكة S' التي قطرها $[A; B]$

3- دراسة المعادلة

لتكن E مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تتحقق المعادلة (1)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d \Leftrightarrow M \in E$$

لتكن $\Omega(a; b; c)$

-* إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ فإن $E = \emptyset$

-* إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ فإن $E = \{\Omega\}$. فلكة مركزها Ω وشعاعها منعدم

$a^2 + b^2 + c^2 - d = r^2$ حيث $E = S(\Omega; r)$.

مréhne

و b و c و d أعداد حقيقة

تكون مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تتحقق المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ فلكة

إذا وفقط إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$

تمرين نعتبر E مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تتحقق المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 5 = 0$ فلكة

بين إن E فلكة محددا عناصرها المميزة

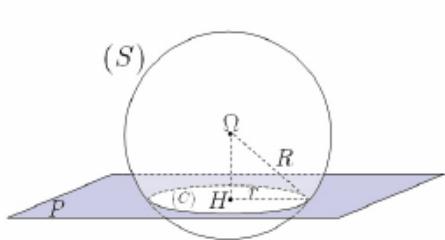
تمرين حدد مجموعة النقط M التي تتحقق $2MA^2 + 3MB^2 = 16$ حيث $A(2; 0; -1)$ و $B(-1; 1; -1)$

II- تقاطع مستوى و فلكة

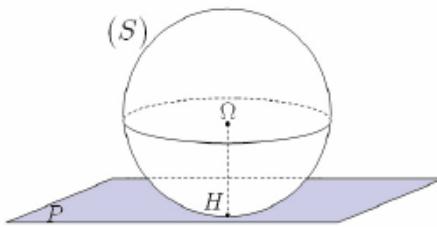
1- تقاطع للفلكة (S) و المستوى (P)

في الفضاء E نعتبر الفلكة $S(\Omega; r)$ و المستوى (P) و النقطة H المسقط العمودي لـ Ω على المستوى (P)
 $d(\Omega; (P)) = H\Omega = d$ نضع

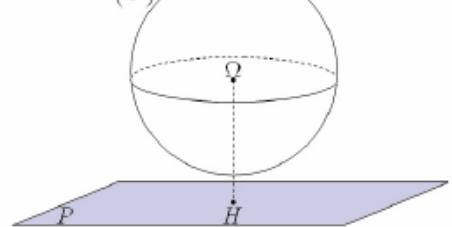
$$d < r$$



$$d = r$$



$$d > r$$



- ليكن (P) مستوى في الفضاء و S فلكرة مركزها Ω و شعاعها r و المسقط العمودي لـ Ω على المستوى (P) يكون تقاطع (P) و S :
- * دائرة مركزها H و شعاعها $\sqrt{r^2 - d^2}$ اذا كان $r < \sqrt{r^2 - d^2}$
 - * نقطة اذا كان $r = \sqrt{r^2 - d^2}$ في هذه الحالة نقول (P) مماس للفلكرة S عند النقطة H
 - * المجموعة الفارغة اذا كان $r > \sqrt{r^2 - d^2}$

2- مستوى مماس لفلكرة في أحد نقطتها

تعريف

لتكن A نقطة من الفلكرة $S(\Omega; r)$
نقول إن المستوى (P) مماس للفلكرة S عند النقطة A اذا كان (P) عمودي على (ΩA) في A

خاصية

$$\forall M \in (P) \quad \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ في } S(\Omega; r) \text{ في } (P) \text{ مماس على } S(\Omega; r)$$

تمرين في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم $(O; i; j; k)$ ، نعتبر S_1 الفلكرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ و S_2 الفلكرة التي مركزها Ω_2 و شعاعها 2 ، و (P) المستوى الذي معادلته $x-2y+z+1=0$ و (P') المستوى الذي معادلته $2x-y-2z-1=0$.

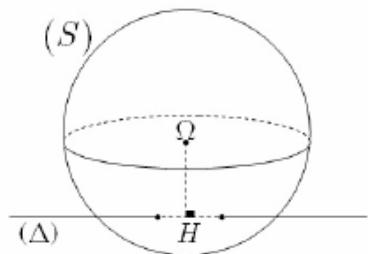
- 1- تأكد أن (P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة محددا عناصرها المميزة.
- 2- أدرس تقاطع (P) و S_2 .
- 3- حدد معادلة المستوى المماس للفلكرة S_1 عند النقطة $A(1; 1; 3)$

3-- تقاطع مستقيم و فلكرة

في الفضاء E نعتبر الفلكرة $S(\Omega; r)$ و المستقيم (Δ) و النقطة H المسقط العمودي لـ Ω على المستقيم (Δ)

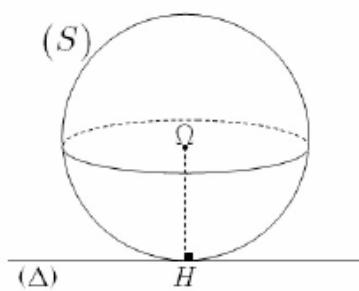
$$\text{وضع } d(\Omega; (\Delta)) = H\Omega = d$$

$$d < r$$



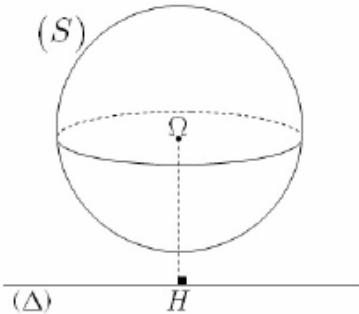
المستقيم (Δ) يخترق الفلكرة
في نقطتين مختلفتين

$$d > r$$



المستقيم (Δ) الفلكرة
يتقاطع في النقطة H

$$d > r$$



تقاطع المستقيم (Δ) الفلكرة
هو المجموعة الفارغة

تمرين

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0 \quad \text{نعتبر}$$

$$(D_3) : \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + 2t \\ y = \frac{1}{3} + 3t \\ z = -2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D_2) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D_1) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

حدد تقاطع S مع كل من (D_1) و (D_2) و (D_3)

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma : تمارين

تمرين 1

- في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر $A(1;0;1)$ و $B(0;0;1)$ و $C(0;-1;1)$ و المستقيم (D) المار من C والموجه بـ $\vec{u}(-1;2;1)$
- 1 بين أن مجموعة النقط M حيث $MA=MB=MC$ مستقيم وحدد تمثيلا بارا متريا له
 - 2 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على (D) في C
 - 3 استنتج معادلة ديكارتية للفلقة S المارة من A و B والمماسة لـ (D) في C

تمرين 2

- في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر $A(-5;0;3)$ و $B(0;7;-3)$ و $C(1;5;-3)$
- 1 أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)
 - 2 أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A حيث $\vec{u}(-1;2;1)$ منتظمية عليه
 - 3 ليكن (P) المستوى المحدد بالمعادلة $x+y+z=0$
 - أ تأكد أن (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مسنقيم (D)
 - ب حدد تمثيلا بارا متريا لـ (D)
- 4 نعتبر في الفضاء الدائرة (C) التي المحددة بـ $\begin{cases} x^2+z^2+10z+9=0 \\ y=0 \end{cases}$
- أ حدد معادلة للفلقة S التي تتضمن الدائرة (C) و ينتمي مركزها إلى (ABC)
 - ب حدد تقاطع S و (AC)

تمرين 3

- في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم مباشر نعتبر $A(-1;1)$ و $B(1;-1;1)$ و (P) المستوى ذا المعادلة $2x-3y+2z=0$
- $$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t & t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$
- 1 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A و B والعمودي على المستقيم (D)
 - 2 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من A و B والعمودي على المستوى (P)
 - 3 أحسب $d(A; (P))$ و $d(A; (D))$
 - 4 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين 4

- في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $3x+2y-z-5=0$
- $$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$
- و (D) المستقيم المعرف بـ
- 1 حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)
 - 2 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P) .

تمرين 5

- في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $x+y+z+1=0$
- و (Q) ذا المعادلة $2x-2y-5=0$
- و (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$
- 1 بين أن (S) فلكرة محددا مركزها وشعاعها
 - 2 تأكد أن (P) مماس للفلقة (S) و حدد تقاطعهما
 - 3 حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(0;1;2)$ و العمودي على (P)
 - 4 تتحقق أن $(Q) \perp (P)$ وأعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D') تقاطع (P) و (Q)

تمرين 6

- في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم نعتبر النقطة $A(-2;3;4)$
- المستوى (P) ذا المعادلة $x+2y-2z+15=0$
- و (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تتحقق $x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-26=0$
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
- و (C) الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-26=0$
- 1 بين أن (S) فلكرة محددا عناصرها المميزة
 - 2 بين أن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة كبيرة (C') و حدها
 - 3 حدد معادلتي المستويين المماسين للفلقة (S) و الموازيين لـ (P)
 - 4 أكتب معادلة الفلقة (S') المار من A المتضمن للدائرة (C)

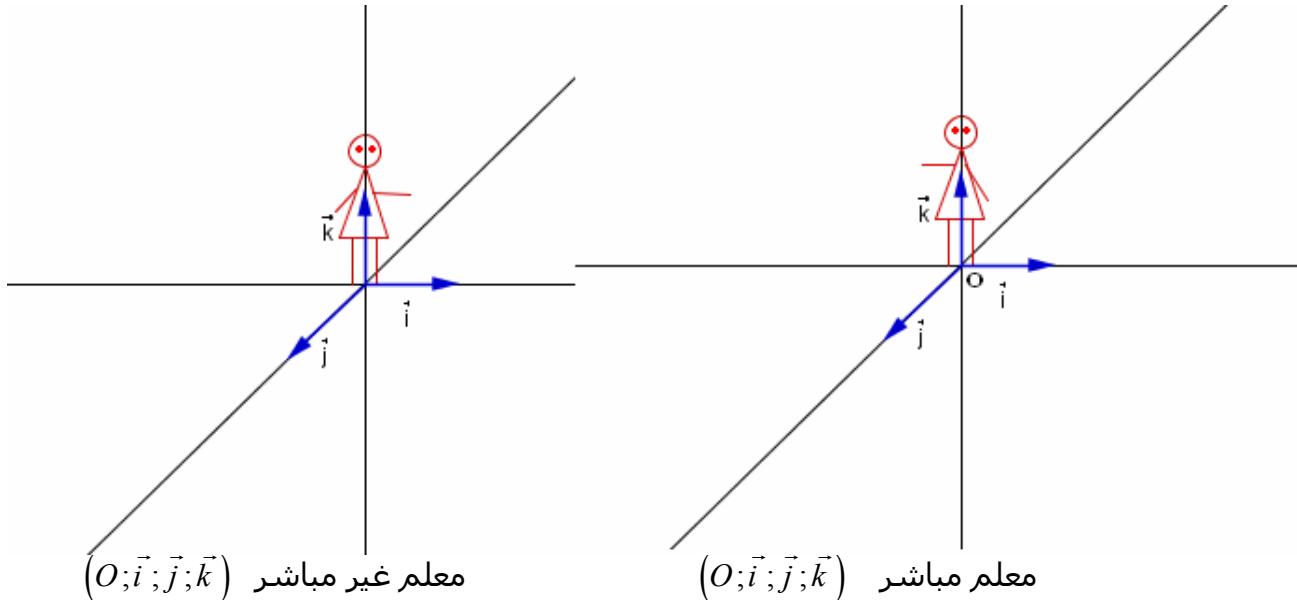
I- توجيه الفضاء 1- معلم موجه في الفضاء

ننسب الفضاء E إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\overrightarrow{OK} = \vec{k} \quad \overrightarrow{OJ} = \vec{j} \quad \overrightarrow{OI} = \vec{i}$$

لتكن I و J و K ثلات نقط حيث \vec{i} رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر

إلى I . النقطة J إما توجد على يمين « رجل أمبير » أو على يساره .



تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. لتكن I و J و K ثلات نقط حيث $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$. نقول إن $* (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير » $* (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير » $*$

أمثلة * نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم مباشر

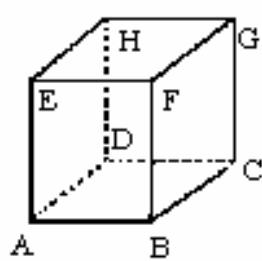
$(O; \vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$ معلم غير مباشر

$(O; \vec{j}; \vec{k}; \vec{i})$ معلم مباشر

$ABCDEF GH$ مكعب طول حرفه 1 **

معلمان مباشران $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$; $(B; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BF})$

معلمان غير مباشران $(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})$, $(E; \overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EH})$



2- الأسرة المعاشرة

يمكننا توجيه الفضاء V_3 ، اذا وجهنا جميع أساساته

تعريف

نقول إن الأساس المتعامد المنظم $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معاشر ادا كان $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معاشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و \vec{k} متجمعة واحدة و منتظمية على (P) ، و O نقطة من المستوى (P) $(O; \vec{i}; \vec{j})$ م.م.م. للمستوى (P)

لدينا $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد منظم للفضاء E

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

يكون المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ في المستوى (P) معلماً مباشراً إذا كان المعلم المتعامد

الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشراً

* يتم توجيه مستوى (P) بتوجيهه متوجهة منتظمة عليه.

* كل المستويات الموازية ل(P) له نفس توجيه المستوى (P)

II - الحداء المتحقق

1- تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متوجهتين من الفضاء V_3 و A و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ الجداء المتجهي للمتوجهتين \vec{u} و \vec{v} في هذا الترتيب، هو المتوجهة التي لها بـ $\vec{v} \wedge \vec{u}$ المعرفة كما يلي

* إذا كانتا \vec{u} و \vec{v} مستقيميتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

* إذا كانتا \vec{u} و \vec{v} غير مستقيميتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u}$ هي المتوجهة التي تحقق:

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ عمودي على كل من \vec{u} و \vec{v} -

- $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس مباشر. -

$$\left[\widehat{AOB} \right] \quad \text{حيث } \theta \text{ قياس الزاوية} \quad \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

أمثلة * نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشراً

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

* إذا كان \vec{u} و \vec{v} متوجهتين واحديتين و متعامدتين فان $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس مباشر.

$$\|\vec{u}\| = 5 \quad \|\vec{v}\| = 2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \quad (\vec{u}; \vec{v}) = \theta \quad \theta \in [0; \pi] \quad \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \text{ حسب}$$

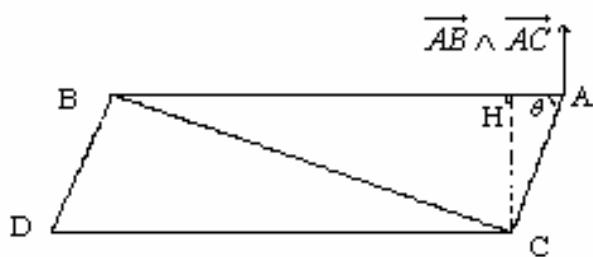
التمرين

2- خصائص

A- خاصية

إذا كانت A و B و C ثلاث نقاط غير مستقيمية من الفضاء فإن المتوجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منتظمة على المستوى (ABC).

لتكن A و B و C ثلاث نقاط غير مستقيمية من الفضاء θ قياس الزاوية على (AB) المسقط العمودي لـ C



$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \theta \quad HC = AC \sin \theta$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times HC$$

خاصية

مساحة المثلث ABC هو نصف $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

نسمحة

مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

D- خاصية

لتكن \vec{u} و \vec{v} متوجهتين من الفضاء يكون $\vec{u} \wedge \vec{v}$ منعدماً أداً فقط كان \vec{u} و \vec{v} مستقيميتين

البرهان \Rightarrow (بديهي - التعريف -)

$\Leftarrow *$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} &\Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \\ &\Rightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \quad \vee \quad \|\vec{v}\| = 0 \quad \vee \quad \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont liés} \end{aligned}$$

ملاحظة
جـ- الحداء المتجهي والعمليات(نقيـل)

$\forall (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in V_3^3$	$\forall \alpha \in \mathbb{R}$	$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$
		$(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$
		$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
		$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$

تمرين

. $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعدد ممنظم مباشر .

$$(2\vec{i} - \vec{j}) \wedge (3\vec{i} + 4\vec{j}) \quad (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \wedge \vec{k} \quad (\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge \vec{j} \quad \vec{i} \wedge 3\vec{j} \quad \text{أحسب}$$

تمرين

لتكن $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d}$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d}$

بين إن $\vec{a} - \vec{d}$ و $\vec{b} - \vec{c}$ مسنيقيـيتان

3- الصيغة التحليلية للحداء المتجهي في م.م.م مباشر.

$(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعدد ممنظم مباشر

$$\begin{aligned} \vec{u}(x; y; z) \quad &\vec{v}(x'; y'; z') \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k} \end{aligned}$$

خاصـة

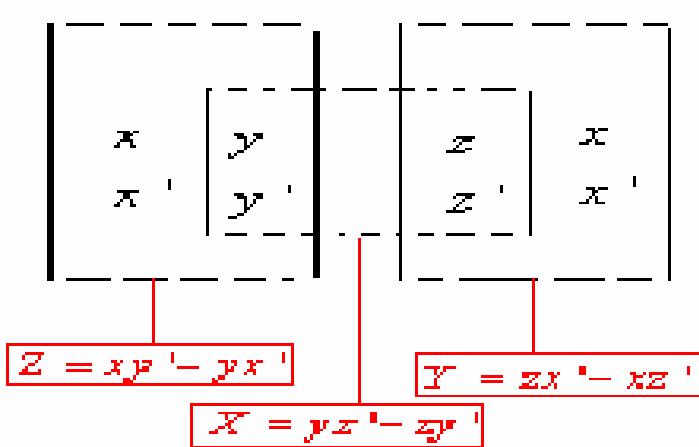
الفضاء E منسوب إلى معلم متعدد ممنظم مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ متوجهـان

من V_3

إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u} \wedge \vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ هو $(X; Y; Z)$ حيث

$$X = yz' - zy' \quad Y = zx' - xz' \quad Z = xy' - yx'$$

ملاحظة يمكن استعمال الوضعـية التالية



$$C(1; 2; 1) \quad B(0; -3; 2) \quad A(1; 2; 1) \quad \vec{u}(1; 2; 0) \quad \vec{v}(-2; -1; 1) \quad \text{نعتبر}$$

أحسب مساحة المثلث (ABC)

حدد $\vec{u} \wedge \vec{v}$

مثال

III - تطبيقات الحداء المتجهي

لتكن C_1 و C_2 ثلاث نقط غير مستقيمية من فضاء منسوب الى معلم متعمد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

حدد معادلة المستوى (ABC)

مثال نعتبر $A(1;2;3)$ و $B(1;-1;1)$ و $C(2;1;2)$

2- تقاطع مستوى

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعمد ممنظم مباشر

$$(P) : ax+by+cz+d=0$$

$$(P') : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ منظمية لـ (P) و $\vec{n}'(a';b';c')$ منظمية لـ (P')

* اذا كان (P) و (P') متتقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و (P') موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و (P') متتقاطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

تمرين

حدد تقاطع $4x-4y+2z-5=0$ و $x+2y-2z+3=0$

3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ \vec{u} ، M نقطة من الفضاء و H مسقطها العمودي على (D)

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \quad AH \text{ et } \vec{u} \text{ liés}$$

$$\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\| = HM \cdot \|\vec{u}\| \sin \frac{\pi}{2} = HM \cdot \|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ \vec{u} ، M نقطة من الفضاء.

$$d(M;(D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{مسافة النقطة } M \text{ عن المستقيم } (D) \text{ هي}$$

تمرين

$$d(A;(D)) = ? \quad (D) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad A(3;2;-1)$$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم مباشر نعتبر $A(1;2;1)$ و $B(-2;1;3)$ و (D) المستقيم الذي

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادلته}$$

1- حدد $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد $d(A;(D))$

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)