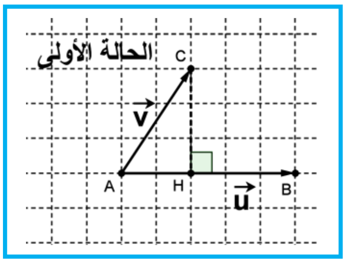
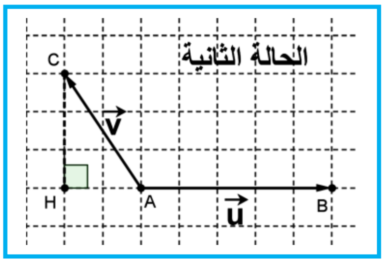
# درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

## I. الجداء السلمي في الفضاء:




لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء المتجهي $V_3$ و A و B و C نقط من الفضاء $(\mathcal{E})$ حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو :

- في الحالة 1 هو: $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$
- في الحالة 2 هو: $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

### 01. تعريف:

ليكن $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء $V_3$ و H المسقط العمودي ل C على $(AB)$.

الجداء السلمي ل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و يرمز له ب $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ هو:

- العدد الحقيقي $AB \times AH$ إذا كان $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس المنحى
- العدد الحقيقي $-AB \times AH$ إذا كان $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما منحيان $\neq$
- إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = 0$ (الجداء السلمي منعدم)

### 02. ملاحظات :

أ- $\vec{u}.\vec{u} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2 \geq 0$

ب- $\vec{u}.\vec{u}$ يسمى المربع السلمي ل $\vec{u}$ ويرمز له ب: $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$.

ج- العدد الحقيقي الموجب: $AB = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ويرمز له ب: $AB = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2} = \|\vec{u}\|$

د- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$

ه- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ أو $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

و- ( $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان ) $\Leftrightarrow |\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

### 03. خاصيات:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات من $V_3$ و $\alpha$ من $\mathbb{R}$ لدينا :

أ- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ ( تماثلية الجداء السلمي ).

ب- ( خطانية الجداء السلمي ) $\begin{cases} \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} \\ (\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u} \\ \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) \end{cases}$

ج- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

د- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

ه- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

# درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

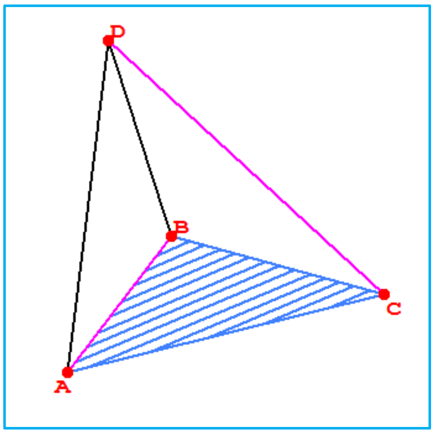
**04. تمرين تطبيقي :**

ليكن ABCD رباعي أوجه منتظم ( كل وجه هو مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه هو $a$ ) .

1. بين أن : ضلعين متقابلين هما متعامدين ( مثال الضلع المقابل للضلع $[AB]$ هو الضلع $[DC]$ ) .

**جواب :**

1. نبين أن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ .




لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a\times a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}$ . $(1)$

وكذلك : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=a\times a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}$ . $(2)$

ومنه :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\\&=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\&=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

( حسب $(1)$ و $(2)$ )

وبالتالي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ .

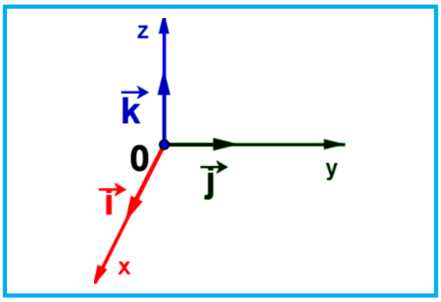
خلاصة : $(AB)\perp(CD)$ .

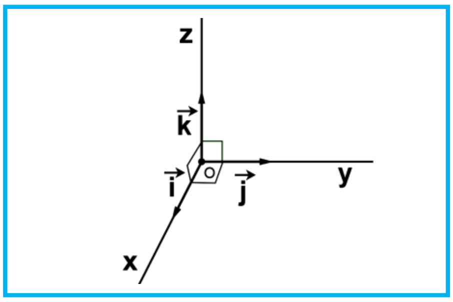
بنفس الطريقة نبين أن : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ .

## II. معلم متعامد ممنظم – أساس متعامد ممنظم.

**01. تعاريف:**

- $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساس في الفضاء $V_3$ يكافئ $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ غير مستوائية من الفضاء $\left(\det\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\neq 0\right)$
- أخذ نقطة $0$ من الفضاء ؛الرباعي $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ يسمى معلم في الفضاء،
  نقول أن الفضاء منسوب إلى المعلم $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أو أيضا الفضاء مزود بالمعلم $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
- $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساس في الفضاء $V_3$ هو أساس متعامد ممنظم يكافئ $\vec{k}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}=0$ و $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=\|\vec{k}\|=1$ .
  و في هذه الحالة المعلم $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ يسمى معلم متعامد ممنظم




## III. تحليلية الجداء السلمي في الفضاء

باقي فقرات الدرس المتبقية الفضاء نرمز له ب $(\mathcal{E})$ و منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. $\vec{u}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}(x',y',z')=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ متجهتين من الفضاء $V_3$ .

$\vec{u}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}(x',y',z')=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ متجهتين من $(\mathcal{P})$

1) أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ بدلالة x و y و z و x' و y' و z' ثم $\|\vec{u}\|$ بدلالة x و y و z .

2) أعط شرط ضروري وكافي لتعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بدلالة x و y و z و x' و y' و z' .

3) أحسب المسافة: AB مع $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ .

4) أعط الخاصية:

01. خاصيات:

> الجداء السلمي ل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو $\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx'+yy'+zz'$
>
> منظم المتجهة $\vec{u}$ هو : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
>
> المسافة بين A و B هي : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

02. مثال :

نعتبر $\vec{u}(1,2,3)$ و $\vec{v}(5,7,4)$ متجهتين من الفضاء و $A(1,5,7)$ و $B(2,9,8)$

1. أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ ثم المسافة AB .

لدينا :

- $\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\times5+2\times7+3\times4 = 31$ .
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2+7^2+4^2} = \sqrt{88}$ .
- لدينا : $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 9-5 \\ 8-7 \end{pmatrix}$ ومنه : $AB = \sqrt{1^2+4^2+1^2} = \sqrt{18}$

خلاصة : $\vec{u}.\vec{v} = 31$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{88}$ و $AB = \sqrt{18}$

## IV. مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث : $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$ مع $k \in \mathbb{R}$

01. خاصية:

> $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة و $\vec{u}(a,b,c)$ متجهة غير منعدمة من الفضاء و k من $\mathbb{R}$ ؛ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$ هي مستوى معادلته تكتب على شكل : $ax+by+cz+d=0$.

02. مثال: $A(1,1,1)$ و $\vec{u}(0,1,0)$

نحدد $(P)$ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء $(\mathcal{E})$ حيث : $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$

لدينا : $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 0.(x-1)+1(y-1)+0(z-1)=0$

$\Leftrightarrow y-1=0$

خلاصة : المجموعة $(P)$ هي المستوى الذي معادلته : $y=1$

## V. مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه:

### 01. متجهة منظمية على مستوى:

أ- تعريف:

متجهة منظمية على مستوى $(P)$ هي: كل متجهة $\vec{n}$ غير منعدمة و يكون اتجاهها عموديا على المستوى $(P)$.

ب- نتيجة:

$\vec{n}$ منظمية على المستوى $(P)$ يكافئ أن: $\vec{n}$ متعامدة مع متجهتين موجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ للمستوى $(P)$.

### 02. خاصية:

أ- خاصية :

$a$ و $b$ و $c$ و $d$ من $\mathbb{R}$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $ax+by+cz+d=0$ هي مستوى و المتجهة الغير المنعدم $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على هذا المستوى.

ب- أمثلة :

- ماذا تمثل مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق ما يلي : $x+2y-z+4=0$.

مجموعة النقط هي المستوى $(P)$ حيث $\vec{n}(1,2,-1)$ منظمية على $(P)$ و المارة من $A(0,0,4)$ (لإن إحداثيات A تحقق المعادلة)

- نجدد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$ المار من $A(2,1,-3)$ و متجهة منظمية عليه هي $\vec{n}(1,1,2)$.

ليكن $M(x,y,z)$ من الفضاء.

لدينا : $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\times1+(y-1)\times1+(z+3)\times2=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+2z+3=0$$

خلاصة : معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$ هي : $(P)\ :\ x+y+2z+3=0$.

ج- ملحوظة :

- المستوى السابق نرمز له ب: $P(A,\vec{n})$ أو $P(A(0,0,4),\vec{n}(1,2;-1))$
- مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوى $(P)$ المار من $A$ و متجهة منظمية على $(P)$ هي $\vec{n}$ ( أي $P(A,\vec{n})$ ).

د- خاصية :

الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
كل مستوى $(P)$ يقبل معادلة ( تسمى ديكارتية ) على شكل : $ax+by+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على هذا المستوى.

ه- برهان :

نبين أن : $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على هذا المستوى .

لدينا : $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0 \ ; (1)$

$A(x_0,y_0,z_0)\in(P)\Leftrightarrow ax_0+by_0+cz_0+d=0 \ ; (2)$

فرق ل $(1)$ مع $(2)$ نحصل على : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ .

ومنه : $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$ .

أي : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

ومنه : $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$

خلاصة : $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على هذا المستوى .

## VI. مسافة نقطة عن مستوى :

### 01. تعريف:

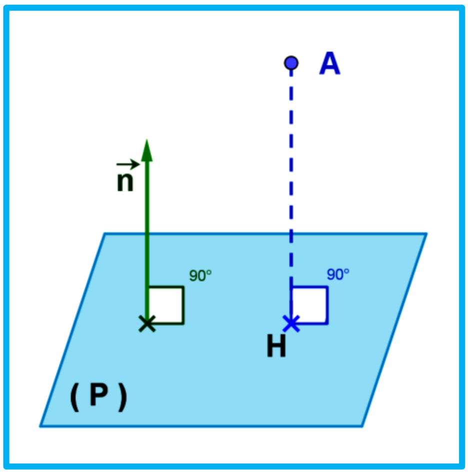
$(P)$ مستوى من الفضاء و $A$ نقطة من الفضاء و النقطة $H$ المسقط العمودي ل $A$ على المستوى $(P)$ المسافة $AH$ تسمى المسافة للنقطة $A$ عن المستوى $(P)$ ونرمز لها ب : $AH=d(A,(P))$ .

### 02. خاصية:

$A$ نقطة من الفضاء و $(P)$ مستوى من الفضاء الذي معادلته هي: $ax+by+cz+d=0$ مسافة النقطة $A$ عن المستوى $(P)$ هي: $AH=d(A,(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

### 03. برهان :

لنعتبر $(P)$ مستوى من الفضاء معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من الفضاء و $H(x_H,y_H,z_H)$ المسقط العمودي ل $A$ على المستوى $(P)$ .




نعلم أن :

- $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على $(P)$ . ( $\vec{n}\perp(P)$ )
- $H$ المسقط العمودي ل $A$ على المستوى $(P)$ .
( $\overrightarrow{AH}\perp(P)$ و $ax_H+by_H+cz_H+d=0$ لأن $H\in(P)$ ) .
- من خلال $ax_H+by_H+cz_H+d=0$ فإن : $ax_H+by_H+cz_H=-d$

ومنه : $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AH}$ مستقيميتين و بالتالي : $\exists t\in\mathbb{R}/\overrightarrow{AH}=t\vec{n}$ .

من جهة أخرى :

الجداء السلمي ل $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AH}$ هو :

$$\overrightarrow{AH}.\vec{n}=\begin{pmatrix} x_H-x_A \\ y_H-y_A \\ z_H-z_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
$$=a(x_H-x_A)+b(y_H-y_A)+c(z_H-z_A)$$

$$= ax_A + by_A + cz_A - \left(\underbrace{ax_H + by_H + cz_H}_{-d}\right)$$

$$= ax_A + by_A + cz_A + d$$

إذن : $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = \left|ax_A + by_A + cz_A + d\right| \quad (1)$

نعلم أن : $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AH}$ مستقيميتين إذن : $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH\left\|\vec{n}\right\|\left|\cos\left(\overline{\overrightarrow{AH},\vec{n}}\right)\right| = AH\left\|\vec{n}\right\|$ أي $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH\left\|\vec{n}\right\| \quad (2)$ .

من خلال : $(1)$ و $(2)$ نستنتج أن : $AH\left\|\vec{n}\right\| = \left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|$ .

ومنه : $AH = \dfrac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

**04. مثال:**

لنعتبر المستوى $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و النقطة $A(0,0,m)$ و $m \in \mathbb{R}$

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$.

2) أحسب مسافة النقطة $A$ عن المستوى $(P)$.

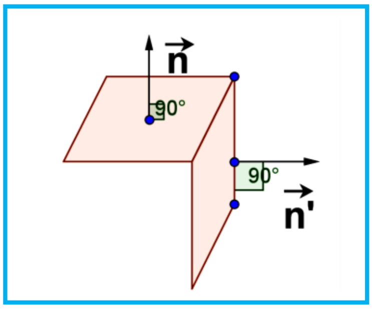
3) ماذا تمثل الحالة التي تكون فيها $d(A,(P)) = 0$.

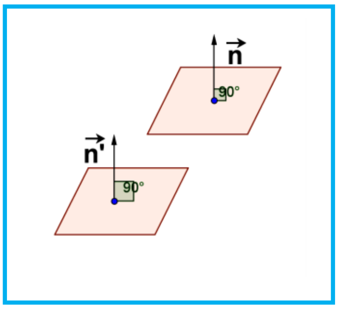
## VII. الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات و التعامد

**01. خاصية 1:**

$(P_1): ax+by+cz+d=0$ و $(P_2): a'x+b'y+c'z+d'=0$ مستويين من الفضاء و $\vec{n}(a,b,c)$ و $\vec{n}'(a',b',c')$ منظميتين على $(P_1)$ و $(P_2)$ على التوالي

- $(P_1) \parallel (P_2)$ يكافئ $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ مستقيميتين
- $(P_1) \perp (P_2)$ يكافئ $\vec{n}'.\vec{n} = 0$ ( الجداء السلمي = 0 )

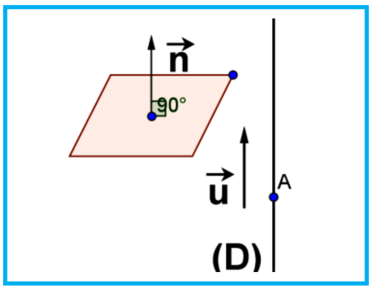


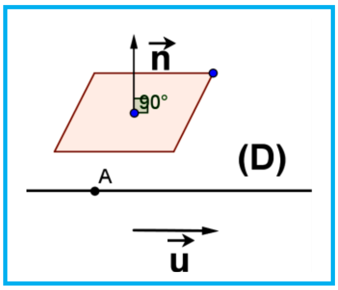




**02. خاصية 2:**

$P(A,\vec{n})$ مستوى من الفضاء و $D(A,\vec{u})$ مستقيم من الفضاء.

- $(P) \parallel (D)$ يكافئ $\vec{u}.\vec{n} = 0$ ( الجداء السلمي = 0 )
- $(P) \perp (D)$ يكافئ $\vec{n}$ $\vec{u}$ مستقيميتين.

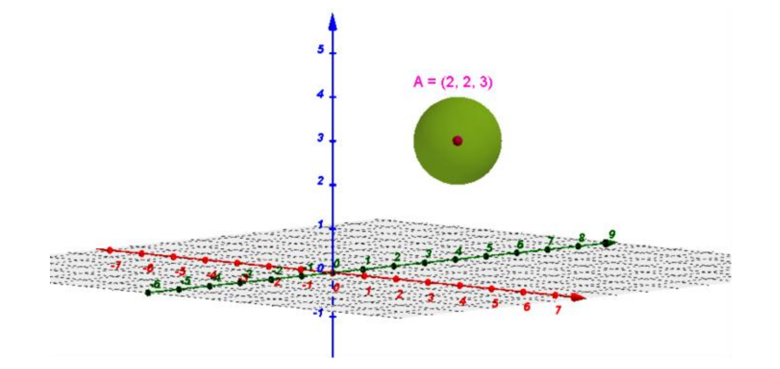


## درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

## VIII. دراسة تحليلية للفلكة:

### 01. فلكة:




- تعريف:

$\Omega$ نقطة من الفضاء و $R$ عدد حقيقي موجب قطعا $(R > 0)$

الفلكة $(S)$ التي مركزها $\Omega$ و شعاعها $R$ هي مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\Omega M = R$ ونرمز لها ب: $S(\Omega, R)$.

$A$ و $B$ نقطتين من $(S)$ حيث $\Omega$ منتصف القطعة $[AB]$ هذه القطعة تسمى قطر للفلكة $(S)$ ونرمز للفلكة كذلك ب: $S_{[AB]}$.

### 02. معادلة ديكارتية لفلكة $S(\Omega, R)$:

- خاصية:

معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega(a,b,c),R)$ هي :

⫽ $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=R^2$ أو أيضا

⫽ $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ مع $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

- مثال:

معادلة ديكارتية للفلكة: $S(O,1)$ هي: $x^2+y^2+z^2=1$

### 03. معادلة ديكارتية لفلكة $S_{[AB]}$:

- خاصية:

$A$ و $B$ نقطتين مختلفتين من الفضاء.

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي الفلكة $S_{[AB]}$ التي معادلتها الديكارتية هي:

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

- برهان :

نعتبر $I$ منتصف $[AB]$ ( أي مركز الفلكة $(S)$ )

لدينا :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$$

$$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}.\left(-\overrightarrow{IA}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}.\vec{0}-IA^2=0$$

$$\Leftrightarrow MI^2=IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI=IA$$

$$\Leftrightarrow M\in S_{(I,r=IA)}$$

## درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

**خلاصة :** مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي الفلكة التي مركزها I منتصف $[AB]$ و شعاعها $r=IA=\frac{AB}{2}$ أو أيضا الفلكة $S_{[AB]}$ التي قطرها $[AB]$ .

- **مثال:**

$A(0,1,0)$ و $B(0,-1,0)$ . حدد معادلة ديكارتية للفلكة $S_{[AB]}$

$$M(x,y,z)\in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1;\ \left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\right)$$

**04.** دراسة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ , (a و b و c و d من $\mathbb{R}$)

- **خاصية:**

a و b و c و d من $\mathbb{R}$ حيث $R_2=a^2+b^2+c^2-4d$

$(E)$ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ هي :

أ- الفلكة $(E)=S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right),R=\frac{\sqrt{R_2}}{2}\right)$ إذا كان $R_2>0$.

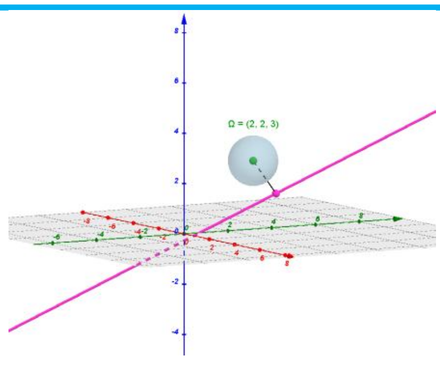
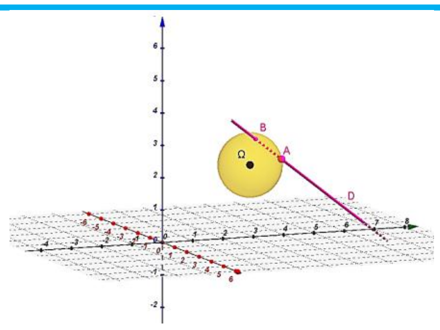
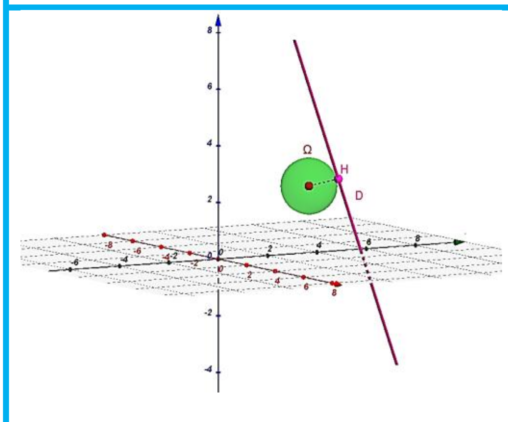
ب- $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$ إذا كان $R_2=0$

ج- $(E)=\varnothing$ إذا كان $R_2<0$ .

## IX. تقاطع فلكة $S(\Omega,R)$ و مستقيم $D(A,\vec{u})$

**01.** خاصيات:

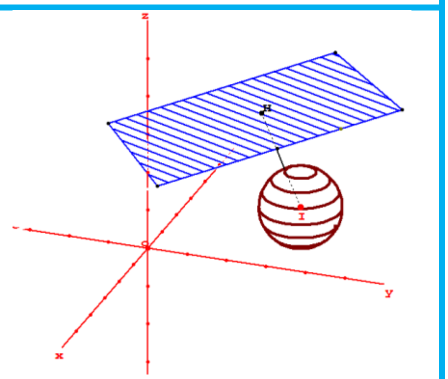
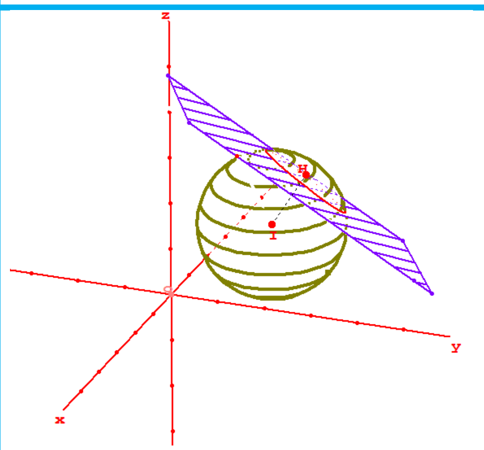
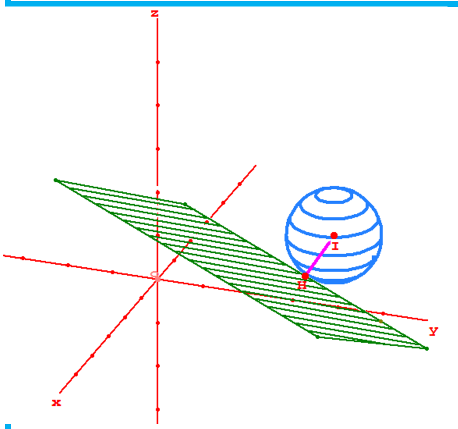
H المسقط العمودي ل $\Omega$ على $(D)$ و $d=\Omega H$

| حالة 1 : | حالة 2 : | حالة 3 : |
|---|---|---|
| $(D)\cap(S)=\varnothing$ | $(D)\cap(S)=\{A,B\}$ | $(D)\cap(S)=\{H\}$ |
| نقول : $(D)$ خارج الفلكة $(S)$ | نقول : $(D)$ يقطع $(S)$ في A و B | نقول : $(D)$ مماس ل $(S)$ في H |
| شرط : $d=\Omega H>R$ | شرط : $d=\Omega H<R$ | شرط : $d=\Omega H=R$ |
|  |  |  |

## X. تقاطع فلكة $S(\Omega,R)$ و مستوى $P(A,\vec{u},\vec{v})$

### 01. الأوضاع النسبية - خاصيات:

$H$ المسقط العمودي ل $\Omega$ على المستوى $(P)$ و $d=\Omega H$

| حالة 1 : $(P)\cap(S)=\varnothing$ | حالة 2 : $(P)\cap(S)=(C)$ | حالة 3 : $(D)\cap(S)=\{H\}$ |
|---|---|---|
| نقول: $(P)$ خارج الفلكة $(S)$ | نقول: $(P)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$ مركزها $H$ و شعاعها $R_C=\sqrt{R^2-d^2}$ | نقول: $(P)$ مماس للفلكة في النقطة $H$ حيث المستقيم $(H\Omega)\perp(P)$ |
| شرط: $d=\Omega H>R$ | شرط: $d=\Omega H<R$ | شرط: $d=\Omega H=R$ |
|  |  |  |

### 02. خاصية:

$S(\Omega,R)$ فلكة و $A$ من $(S)$ يوجد مستوى وحيد $(P)$ مماس ل $(S)$ عند النقطة $A$ وهو المستوى العمودي على المستقيم $(A\Omega)$ في النقطة $A$ أي : $M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$ ومنه معادلة $(P)$ هي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$