

السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الحساب التكاملي حلول مقترحة	سلسلة 1
تمرين 1 : احسب التكاملات التالية :		
$I = \int_1^2 (x^2 + 7) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 7x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 14 \right) - \left(\frac{1}{3} + 7 \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 14 - 7 = \frac{7}{3} + 7 = \frac{28}{3}$		
$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left[\ln(x) - 2\sqrt{x} \right]_1^2 = (\ln(2) - 2\sqrt{2}) - (\ln(1) - 2) = \ln(2) - 2\sqrt{2} + 2$		
$I = \int_0^1 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x+3} \right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+3} \right) dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \ln(x+3) \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \ln(x+3) \right]_0^1$		
$I = \left(\frac{2}{3} + \ln(4) \right) - (0 + \ln(3)) = \frac{2}{3} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$		
 يجب تحويل الجذر المربع لصيغته الأسية لكي نحصل على تكامل اعتيادي $x^r \rightarrow \frac{x^{r+1}}{r+1}$		
$I = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - (0 + 0 + 0) = \frac{3+10+15}{15} = \frac{28}{15}$		
 لا يمكن الحساب مباشرة، لذلك ننشر أولا		
$I = \int_0^{\frac{p}{4}} \sin(x) + \cos(3x) dx = \left[-\cos(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) \right]_0^{\frac{p}{4}} = \left(-\cos\left(\frac{p}{4}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3p}{4}\right) \right) - (-1 + 0)$		
$I = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} + 1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{3}$		
$I = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} + \frac{1}{e^{3x}} dx = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} + e^{-3x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^{\ln(2)} = \left(\frac{e^{2\ln(2)}}{2} - \frac{e^{-3\ln(2)}}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$		
$I = \frac{e^{\ln(4)}}{2} - \frac{e^{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{2} - \frac{\frac{1}{9}}{3} - \frac{1}{6} = 2 - \frac{1}{27} - \frac{1}{6} = \frac{97}{54}$		
 طبقنا إحدى خاصيات الدالة الأسية لكي نحصل على تكامل اعتيادي $e^{ax} \rightarrow \frac{e^{ax}}{a}$		
$I = \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \int_0^1 x \times x^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$		
 حذار أن تقوم بالبحث عن الدالة الأصلية لكل من x و $\sqrt{x}$ وتقوم بضرب الناتج، لأن هذه القاعدة غير صحيحة في الحساب التكاملي (الطريقة الصحيحة تسمى التكامل بالأجزاء)		
$I = \int_1^2 \frac{1+x}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} dx = \left[\frac{-1}{x} + \ln(x) \right]_1^2 = \left(\frac{-1}{2} + \ln(2) \right) - (-1 + 0) = \frac{1}{2} + \ln(2)$		
 عندما لا يكون لدينا تكامل اعتيادي نبحث عن طرق أخرى للحصول على تكاملات اعتيادية		
 لاحظ بساطة الفكرة في هذا المثال.		
$I = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} 1 - \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} (0 - 0) = \frac{p}{4}$		

$$I = \int_0^{\ln(3)} \sqrt{e^x} dx = \int_0^{\ln(3)} (e^x)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\ln(3)} e^{\frac{x}{2}} dx = \left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\ln(3)} = \left[2e^{\frac{x}{2}} \right]_0^{\ln(3)} = \left(2e^{\frac{\ln(3)}{2}} \right) - 2 = 2e^{\ln(\sqrt{3})} - 2 = 2\sqrt{3} - 2$$

$$I = \int_0^1 3^x dx = \int_0^1 e^{x \ln(3)} dx = \left[\frac{e^{x \ln(3)}}{\ln(3)} \right]_0^1 = \frac{e^{\ln(3)} - 1}{\ln(3)} = \frac{2}{\ln(3)}$$

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

$$I = \int_0^1 (x+1)\sqrt{x} dx = \int_0^1 x\sqrt{x} + \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) - (0+0) = \frac{16}{15}$$

الفكرة سبق التطرق لها في مثال سابق

$$I = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^{\ln(2)} = \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

لاحظ أن البسط يمثل مشتقة المقام

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = \left[-\ln(|\cos(x)|) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln(1) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$I = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{\ln(2)}{2}$$

نفس الملاحظة السابقة لكن مع مراعات الإشارة

السطر الأخير مجرد إضافة لتبسيط النتيجة

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7(x) \cos(x) dx = \left[\frac{\sin^8(x)}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$u(x)^n u'(x) \rightarrow \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \left[\frac{1}{2} 2\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \rightarrow 2\sqrt{u(x)}$$

$$I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln(x) dx = \left[\frac{\ln(x)}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}$$

$$u(x) u'(x) \rightarrow \frac{u(x)^2}{2}$$

$$I = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (2x) e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

$$u'(x) e^{u(x)} \rightarrow e^{u(x)}$$

$$I = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln(2)} 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \left[x - \ln(e^x + 1) \right]_0^{\ln(2)}$$

$$I = (\ln(2) - \ln(3)) - (0 - \ln(2)) = 2\ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

لاحظ بساطة الفكرة و الاستفادة من حل تكامل سابق

$$I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \left[\ln(\ln(x)) \right]_e^{e^2} = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln(2)$$

يتطلب دقة الملاحظة في التعبير الرياضي.

$$I = \int_0^1 |x^2 + 1| dx = \int_0^1 x^2 + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

يمكن حذف رمز القيمة المطلقة لكونه يتضمن تعبيراً موجباً

$$I = \int_0^1 |x-1| dx = \int_0^1 -x+1 dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

بما أن: $0 \leq x \leq 1$ فإن $x-1 \leq 0$ أي: $|x-1| = -x+1$

$$I = \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = \int_0^1 -x+1 dx + \int_1^2 x-1 dx$$

$$I = \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - (0+0) + \left(\frac{4}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

التعبير $x-1$ يغير الإشارة على المجال $[0, 2]$ لذلك استعملنا علاقة شال وقسمنا المجال لمجالات يمكن فيها تحديد إشارة التعبير.

$$I = \int_0^p |\cos(x)| dx = \int_0^{\frac{p}{2}} |\cos(x)| dx + \int_{\frac{p}{2}}^p |\cos(x)| dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos(x) dx + \int_{\frac{p}{2}}^p -\cos(x) dx$$

$$I = \left[\sin(x) \right]_0^{\frac{p}{2}} + \left[-\sin(x) \right]_{\frac{p}{2}}^p = 1 - 0 + 0 - (-1) = 2$$

نفس الملاحظة السابقة

تمرين 2 :

$$a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3} = a + \frac{bx-3b+cx+c}{(x+1)(x-3)} = \frac{ax^2-2ax-3a+bx-3b+cx+c}{x^2-2x-3} \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_{-1,3} \quad ax^2 + (-2a+b+c)x + (-3a-3b+c) = -3x^2 + 7x + 2 \quad \text{منه :}$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ c = -1 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{منه :} \quad \begin{cases} a = -3 \\ c = 1-b \\ 4b = 8 \end{cases} \quad \text{منه :} \quad \begin{cases} a = -3 \\ b+c=1 \\ -3b+c=-7 \end{cases} \quad \text{منه :} \quad \begin{cases} a = -3 \\ -2a+b+c=7 \\ -3a-3b+c=2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3} dx = \int_0^2 -3 + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-3} dx = \left[-3x + 2\ln|x+1| - \ln|x-3| \right]_0^2$$

$$I = -6 + 2\ln(3) + \ln(3) = 3\ln(3) - 6$$

تمرين 3 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x(e^x-e^{-x})}{e^x(e^x+e^{-x})} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} dt = \int_0^1 \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} dt = \int_0^1 \frac{(e^t+e^{-t})'}{e^t+e^{-t}} dt = \left[\ln(e^t+e^{-t}) \right]_0^1 = \ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

لاحظ أهمية السؤال المساعد

تمرين 4 :

$$\forall x \in [-1, +\infty[\quad (\sqrt{x+1})^3 - \sqrt{x+1} = (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = x\sqrt{x+1} \quad \text{لدينا :}$$

$I = \int_0^1 t\sqrt{t+1} dt = \int_0^1 (\sqrt{t+1})^3 - \sqrt{t+1} dt = \int_0^1 (t+1)^{\frac{3}{2}} - (t+1)^{\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{(t+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1$ $I = \left(\frac{2}{5} \times 2^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \times 2^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{-4}{15} = \frac{-16}{15}\sqrt{2} + \frac{4}{15} = \frac{4-16\sqrt{2}}{15}$	
أثناء التبسيط : $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \times 2} = 4\sqrt{2}$ 🌱	
تمرين 5 : نعتبر التكاملين : $I = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos(x) e^x dx$ و $J = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin(x) e^x dx$	
لدينا: $g'(x) = (\sin(x)e^x)' = (\sin(x))' e^x + \sin(x)(e^x)' = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x$ إذن: $I + J = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos(x)e^x dx + \int_0^{\frac{p}{2}} \sin(x)e^x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos(x)e^x + \sin(x)e^x dx = [g(x)]_0^{\frac{p}{2}} = e^{\frac{p}{2}}$	1
لدينا: $h(x) = (\sin(x)e^{-x})' = (\sin(x))' e^{-x} + \sin(x)(e^{-x})' = \cos(x)e^{-x} - \sin(x)e^{-x}$ إذن: $I - J = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos(x)e^x dx - \int_0^{\frac{p}{2}} \sin(x)e^x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos(x)e^x - \sin(x)e^x dx = [h(x)]_0^{\frac{p}{2}} = e^{-\frac{p}{2}}$	2
$\begin{cases} I + J = e^{\frac{p}{2}} \\ I - J = e^{-\frac{p}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2I = e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}} \\ 2J = e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}{2} \\ J = \frac{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}{2} \end{cases}$	3

رياضيات النجاح 📖 ✎ مير لخريسي