

المعادلات التفاضلية

I- تقدیم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية والبيولوجية والاقتصادية وغيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوي على مشتقه أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.

يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل f, z, u, \dots) حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة، و مجموعه هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة ، كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصاً للمعادلة ، كل حل يسمى كذلك تكاملاً.

2- أمثلة

(أ) $y' = 0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على \mathbb{R} بـ $y = 1$ حل خاص للمعادلة

مجموعه الدوال الثابتة على \mathbb{R} هي الحل العام للمعادلة $y' = 0$.

(ب) $y'(x) = x^2 - 1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $1 - x^2$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $1 - x^2 \rightarrow x$ على \mathbb{R} .

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعه الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $x \rightarrow \frac{1}{3}x^2 - x + k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي.

II - حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

1/ المعادلة التفاضلية $y' = ay$

* اذا كان $a = 0$ فان $y' = 0$ أي أن الحل العام هو مجموعه الدوال الثابتة على \mathbb{R}

* اذا كان $a \neq 0$

نعلم أن $y' - ay = 0$ ادن $e^{ax} \rightarrow x$ حل خاص للمعادلة $y' - ay = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(e^{ax})' = ae^{ax}$

ليكن y حلاً اعتباطياً للمعادلة $y' - ay = 0$ نضع $y' - ay = 0$

ومنه $y'(x) = z'(x)e^{ax} + az(x)e^{ax}$

أي $y'(x) - ay(x) = z'(x)e^{ax} + ay(x) = z'(x)e^{ax} + 0$ و بالتالي 0

و منه $z'(x) = 0$ و بالتالي $z(x) = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y(x) = \lambda e^{ax} \forall x \in \mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحاله $a = 0$ هي ضمن الحاله العامة.

خاصة

المعادلة التفاضلية $y' = ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول وهي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \lambda e^{ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نسخة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

2- نحل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{3}y$

حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{3}y$ هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث

2/ حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

اذا كان $a = 0$ فان $y' = b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x) = bx + c$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right) \text{ اذا كان } a \neq 0 \text{ فان}$$

$$z' = y' \text{ و منه } z = y + \frac{b}{a} \text{ نضع}$$

$$y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az \Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \text{ وبالتالي}$$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a \neq 0$

المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل ما لانهاية من الحلول وهي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث λ عدد حقيقي اعتيادي.

نستخ

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay + b$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ وهي الدالة

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

نحل المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث λ عدد حقيقي اعتيادي.

III- حل المعادلات التفاضلية

1- المعادلات التفاضلية $y' + ay + by = 0$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة

الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

- اذا كان $a = b = 0$ فان $y'' = 0$ *

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة $y'' = 0$ هي مجموعة الدوال $y(x) = kx + k'$ حيث $x \rightarrow kx + k'$ اذن

- اذا كان $b = 0$ فان $y'' + ay' = 0$ *

$$z' + az = 0 \quad \text{و منه } y'' + ay' = 0 \Leftrightarrow (y')' + ay' = 0$$

و وبالتالي $y'(x) = \lambda e^{-ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتيادي

اذن الحل العام للمعادلة $y'' + ay' = 0$ هي الدوال الأصلية

$$(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad x \rightarrow \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu \quad \text{أي الدوال}$$

3- حل المعادلة التفاضلية

لنبحث عن حلول من نوع $r \in \mathbb{R}$; $y : x \rightarrow e^{rx}$

$$r^2 + ar + b = 0 \Leftrightarrow r^2 e^{rx} + a r e^{rx} + b e^{rx} = 0 \Leftrightarrow E$$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة

$(a; b) \in \mathbb{R}^2$; $E : y'' + ay' + by = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

نشاط

1- أ/ حل المميزة للمعادلة (E_1) و استنتج حلين للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$

ب/ بين ان الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \alpha e^{4x} + \beta e^{-4x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

2- أ/ حل المميزة للمعادلة (E_2) : $y'' - 6y' + 9y = 0$

ب/ بين ان الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{3x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

3- أ/ حل المميزة للمعادلة $E_3: y'' + 4y' + 13y = 0$

ب/ بين ان الدالتين المعرفتين على \mathbb{R} بـ $f: x \rightarrow e^{-2x} \sin 3x$ و $g: x \rightarrow e^{-2x} \cos 3x$ حللين للمعادلة التفاضلية (E_3)

ج/ بين ان الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \alpha f + \beta g$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

لتكن المعادلة التفاضلية $E: y'' + ay' + by = 0$ المعادلة المميزة

*- اذا كان $a^2 - 4b > 0$ فان المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين r_2 و r_1

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدادان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{rx}$ حيث α و β عدادان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_2 = p - iq$ و $r_1 = p + iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow e^{px}(\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدادان اعتباطيان

الحل الذي يحقق

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y'(x_0) = y'_0$ و $y(x_0) = y_0$

الشرطان $y'(x_0) = y'_0$ و $y(x_0) = y_0$ يسميان الشرطين البدئيين.

يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

$\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k \left(\frac{\alpha}{k} \cos qx + \frac{\beta}{k} \sin qx \right) = k(\cos \varphi \cos qx + \sin \varphi \sin qx) = k \cos(qx - \varphi)$ لدينا

$\cos \varphi = \frac{\alpha}{k}$ و $\sin \varphi = \frac{\beta}{k}$ و $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ بوضع

تستنتج اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان $x \rightarrow ke^{px} \cos(qx - \varphi)$ حيث k و φ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$ و حدد الحل الخاص $y_1(0) = 1$ حيث $y_1'(0) = -1$

2- حل المعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$

3- حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

حالات خاصة

*- اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ حيث $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{a}x + \beta \sin \sqrt{a}x$.

*- اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ حيث $x \rightarrow \alpha e^{\sqrt{-a}x} + \beta e^{-\sqrt{-a}x}$.

مثال حل المعادلتين $y'' - 4y = 0$ و $y'' + 2y = 0$

حلول المعادلة $y'' - 4y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x$ حيث $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

حلول المعادلة $y'' + 2y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.