

سلسلة الدعم

تمرين 1: (الدورة العادية 2015)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 + 10z + 26 = 0$$

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $\Omega$  التي ألقاها على التوالي هي:

$$a = -2 + 2i \text{ و } b = -5 + i \text{ و } c = -5 - i \text{ و } \omega = -3$$

$$\frac{b - \omega}{a - \omega} = i \text{ أن بين أن}$$

(ب) استنتج طبيعة المثلث  $\Omega AB$

(3- لتكن النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالإزاحة  $T$  ذات المتجهة  $\vec{u}$  التي لحقها  $6 + 4i$

(أ) بين أن اللق  $d$  للنقطة  $D$  هو  $1 + 3i$

(ب) بين أن:  $\frac{b - d}{a - d} = 2$  واستنتج أن النقطة  $A$  هي منتصف القطعة

$[BD]$

تمرين 2 (الدورة العادية 2015)

أ نعتبر العدد العقدي  $a$  بحيث  $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(1) بين أن معيار العدد العقدي  $a$  هو  $2\sqrt{2} + \sqrt{2}$

(2) تحقق من أن  $a = 2 \left( 1 + \cos \frac{\pi}{4} \right) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$

(3) أ- بإخطاط  $\cos^2 \theta$ ، حيث  $\theta$  عدد حقيقي، بين أن  $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$

(ب) بين أن  $a = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$  ( نذكر أن  $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$  )

(ج) بين أن  $4 \cos \frac{\pi}{8} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$  هو الشكل المثلثي للعدد  $a$

$$a^4 = \left( 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \right)^4 i \text{ ثم بين أن}$$

II نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقطتين  $\Omega$  و  $A$  اللتين لحقاهما على التوالي هما:

$$\omega = \sqrt{2} \text{ و } a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ ونعتبر الدوران } R \text{ الذي مركزه}$$

$$\Omega \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2}$$

(1) بين أن اللق  $b$  للنقطة  $B$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$  هو  $2i$

(2) حدد مجموعة النقطة  $M$  ذات اللق  $z$  بحيث  $|z - 2i| = 2$

تمرين 3: (الدورة الاستدراكية 2015)

(1) أحل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 8z + 32 = 0$$

(ب) نعتبر العدد العقدي  $a$  بحيث  $a = 4 + 4i$

اكتب العدد العقدي  $a$  على شكل المثلثي ثم استنتج أن  $a^{12}$  عدد حقيقي سالب.

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألقاها على التوالي هي:

$$a = 4 + 4i \text{ و } b = 2 + 3i \text{ و } c = 3 + 4i$$

ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة

$$M \text{ بالدوران } R \text{ الذي مركزه } C \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2}$$

أ- بين أن  $z' = iz + 7 + i$

ب- تحقق من أن  $d$  لحق النقطة  $D$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$  هو  $3 + 5i$

ج- بين أن مجموعة النقط  $M$  ذات اللق  $z$  بحيث  $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$  هي المستقيم  $(BC)$

تمرين 4 (الدورة العادية 2016)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط  $A$  و  $B$  و  $\Omega$  التي ألقاها على التوالي هي:

$$a = 5 + 2i \text{ و } b = 5 + 8i \text{ و } \omega = 2 + 5i$$

أ- ليكن  $u$  العدد العقدي بحيث  $u = b - \omega$

تحقق من أن  $u = 3 + 3i$  ثم بين أن  $\arg u \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

ب- حدد عمدة للعدد العقدي  $\bar{u}$

ج- تحقق من أن  $a - \omega = \bar{u}$  ثم استنتج أن  $\Omega A = \Omega B$

$$\text{وأن } \arg \left( \frac{b - \omega}{a - \omega} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

د- نعتبر الدوران  $R$  الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

حدد صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$

تمرين 5 (الدورة الاستدراكية 2016)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 8z + 41 = 0$$

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $\Omega$  التي ألقاها على التوالي هي:

$$a = 4 + 5i \text{ و } b = 3 + 4i \text{ و } c = 6 + 7i \text{ و } \omega = 4 + 7i$$

أ- احسب  $\frac{c - b}{a - b}$  واستنتج أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمية

ب- ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة

صورة  $M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$

$$\text{بين أن } z' = -iz - 3 + 11i$$



أ- أكتب على الشكل المثلي العدد العقدي  $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب- لتكن النقطة  $A$  التي لحقها  $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$  و  $B$  صورة

النقطة  $A$  بالدوران  $R$

ليكن  $b$  لحق النقطة  $B$ ، بين أن  $b = d.a$

(3) لتكن  $t$  الإزاحة التي متجهتها  $\overrightarrow{OA}$  والنقطة  $C$  صورة  $B$  بالإزاحة  $t$  و  $c$  لحق النقطة  $C$

أ- تحقق من أن  $c = b + a$  ثم استنتج أن  $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ب- حدد  $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$  ثم استنتج أن المثلث  $OAC$  متساوي الأضلاع

### تمارين 9 (الدورة الاستدراكية 2018)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$

(2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر الدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  و

النقطة  $A$  التي لحقها  $a = \sqrt{2}(1-i)$

أ- أكتب على الشكل المثلي العدد  $a$

ب- تحقق من أن لحق النقطة  $B$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$

هو  $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

(3) أ- نعتبر النقطة  $C$  التي لحقها  $c = 1+i$ . بين أن

$$b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$$

ب- لتكن  $t$  الإزاحة التي متجهتها  $\overrightarrow{OC}$ ، والنقطة  $D$  صورة  $B$  بالإزاحة  $t$ . بين أن  $OD = |b+c|$

ج- استنتج أن  $OD \times BC = 2\sqrt{3}$

### تمارين 10 (الدورة العادية 2019)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي ألحاقها على

التوالي هي:  $a = 1-i\sqrt{3}$  و  $b = 2+2i$  و  $c = \sqrt{3}+i$  و  $d = -2+2\sqrt{3}$

أ- تحقق من أن  $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$

ب- استنتج أن النقط  $A$  و  $C$  و  $D$  مستقيمية

(3) ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة

صورة  $M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $-\frac{\pi}{3}$

بين أن  $z' = \frac{1}{2}az$

ج- حدد صورة النقطة  $C$  بالدوران  $R$  ثم أعط شكلا مثليا

للعدد  $\frac{a-\omega}{c-\omega}$

### تمارين 6 (الدورة العادية 2017)

نعتبر العددين العقديين  $a$  و  $b$  بحيث  $a = \sqrt{3}+i$  و

$$b = \sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$$

(1) أ- تحقق من أن  $b = (1+i)a$

ب- استنتج أن  $|b| = 2\sqrt{2}$  وأن  $\arg b = \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

ج- استنتج مما سبق أن  $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لحاقهما على التوالي هما  $a$  و  $b$

والنقطة  $C$  التي لحقها  $c = -1+i\sqrt{3}$  بحيث

أ- تحقق من أن  $c = ia$  واستنتج أن  $OA = OC$  و أن

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ب- بين أن النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $A$  بالإزاحة ذات المتجهة

$$\overrightarrow{OC}$$

ج- استنتج أن الرباعي  $OABC$  مربع.

### تمارين 7 (الدورة الاستدراكية 2017)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 + 4z + 8 = 0$$

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألحاقها على التوالي هي:

$$a = -2+2i \text{ و } b = 4-4i \text{ و } c = 4+8i$$

أ- ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة

$M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$

بين أن  $z' = -iz - 4$

ب- تحقق من أن النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $C$  بالدوران  $R$  واستنتج

طبيعة المثلث  $ABC$

(3) ليكن  $\omega$  لحق النقطة  $\Omega$  منتصف القطعة  $[BC]$

أ- بين أن  $|c-\omega| = 6$

ب- بين أن مجموعة النقط  $M$  ذات اللق  $z$  بحيث  $|z-\omega| = 6$  هي

الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$

### تمارين 8 (الدورة العادية 2018)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$2z^2 + 2z + 5 = 0$$



- (ب) حدد صورة النقطة  $C$  بالدوران  $R$   
 (ج) حدد طبيعة المثلث  $OBC$   
 (د) بين أن  $a^4 = 128b$  واستنتج أن النقط  $O$  و  $B$  و  $D$  مستقيمية

### تمرين 13 (الدورة الاستدراكية 2020)

- (1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

(2) نضع  $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

- (أ) أكتب  $a$  على الشكل المثلثي واستنتج أن  $a^{2020}$  عدد حقيقي

- (ب) ليكن العدد العقدي  $b = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$  أثبت أن  $b^2 = a$

- (3) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألقاها على التوالي هي:

- $a$  و  $b$  و  $c$  حيث  $c = 1$  و  $R$  ليكن الدوران الذي مركزه  $O$  وزاوته  $\frac{\pi}{8}$  والذي يحول النقطة  $M$  ذات اللق  $z$  إلى النقطة  $M'$

ذات اللق  $z'$

أ- تحقق من أن  $z' = bz$

- ب- حدد صورة النقطة  $C$  بالدوران  $R$  وبين أن النقطة  $A$  هي

صورة النقطة  $B$  بالدوران  $R$

- (4) أ- بين أن  $|a - b| = |b - c|$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$

- ب- حدد قياسا للزاوية  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

- (5) نعتبر  $T$  الإزاحة ذات المتجهة  $\vec{u}$  ولتكن  $D$  صورة النقطة  $A$  بالإزاحة  $T$

- أ- تحقق أن لق النقطة  $D$  هو العدد العقدي  $b^2 + 1$

- ب- بين أن  $\frac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$  واستنتج أن النقط  $O$  و  $B$  و  $D$

مستقيمية

### تمرين 14 (الدورة العادية 2021)

- (1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

- (2) نعتبر العددين العقديين  $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$  و  $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- (أ) أكتب  $a$  على الشكل الجبري.

(ب) تحقق أن  $\bar{a}b = \sqrt{3}$

- نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألقاها على التوالي هي:  $a$  و

$\bar{a}$  و  $b$

- (2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر الدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$

- (4) لتكن  $H$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $R$ ، و  $h$  لقها و  $P$  النقطة التي لقها  $p = a - c$

- أ- تحقق من أن  $h = ip$

- ب- بين أن المثلث  $OHP$  قائم الزاوية ومتساوي الساقين في  $O$

### تمرين 11 (الدورة الاستدراكية 2019)

- (1) أ- حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 3z + 3 = 0$$

- ب- نضع  $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، أكتب  $a$  على الشكل المثلثي

- (2) نعتبر العدد العقدي  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ، تحقق من أن  $b^2 = i$

- (3) نضع  $h = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ ، بين أن  $h^4 + 1 = a$

- (4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر الدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  والنقطة

$B$  التي لقها  $b$ .

- أ- ليكن  $c$  لق النقطة  $C$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $R$ ، بين أن

$$c = ib$$

- ب- استنتج طبيعة المثلث  $OBC$

### تمرين 12 (الدورة العادية 2020)

- (1) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$(E) \quad z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

- (أ) تحقق من أن مميز المعادلة  $(E)$  هو  $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

- (ب) استنتج حل المعادلة  $(E)$

- (2) نعتبر الأعداد العقدية:  $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$  و

$$b = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

- (أ) تحقق من أن  $\bar{b}c = a$  واستنتج أن  $ac = 4b$

- (ب) أكتب العددين العقديين  $b$  و  $c$  على الشكل المثلثي

- (ج) استنتج أن  $a = 4 \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

- (3) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط  $B$  و  $C$  و  $D$  التي ألقاها على التوالي هي:  $b$  و

$$c \quad \text{و} \quad d = a^4$$

- ليكن  $z$  لق نقطة  $M$  من المستوى و  $z'$  لق النقطة  $M'$  صورة

- $M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{12}$

- (أ) تحقق من أن  $z' = \frac{1}{4}az$



(3) بين أن النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $A$  بتحاك  $h$  مركزه  $O$  يتم تحديد نسبته.

(4) ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى و  $z'$  لحق النقطة  $M'$

صورة النقطة  $M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

(أ) اكتب  $z'$  بدلالة  $z$  و  $a$

(ب) ليكن  $d$  لحق النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالدوران  $R$ , بين أن

$$d = a + 1$$

(ج) لتكن  $I$  النقطة التي لحقها العدد 1, بين أن  $ADIO$  معين.

(5) (أ) تحقق من أن  $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$  و استنتج عمدة للعدد

$$d - b$$

(ب) اكتب العدد  $1-b$  على الشكل المثلثي.

(ج) استنتج قياسا للزاوية  $(\overline{BI}, \overline{BD})$