

الأعداد العقدية - الجزء الثاني-

1- المعادلات من الدرجة الثانية

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \quad (\sqrt{a})^2 = a \quad ; \quad (-\sqrt{a})^2 = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{-*} \quad (i\sqrt{-a})^2 = i^2 \times -a = a \quad ; \quad (-i\sqrt{-a})^2 = (-i)^2 \times -a = a$$

أ/ الجذر المربع لعدد حقيقي

ليكن a عدد حقيقي غير منعدم

إذا كان a موجبا فإن للعدد a جذرين مربعين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

إذا كان a سالبا فإن للعدد a جذرين مربعين هما $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$

لكل عدد حقيقي جذرين مربعين متقابلين

الجذر مربع صفر هو صفر

أمثلة

الجدران المربعان للعدد 3 هو $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

الجدران المربعان للعدد -1 هو i و $-i$

الجدران المربعان للعدد -25 هو $5i$ و $-5i$

الجدران المربعان للعدد -3 هو $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$

ب/ المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية بحيث a غير منعدم .

$$\text{نحل } az^2 + bz + c = 0 \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{حيث} \quad az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \quad \text{إذا كان } \Delta \geq 0 \text{ فإن}$$

$$\text{ومنه } z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ أو } z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

إذا كان $\Delta < 0$ فإن $-\Delta > 0$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + i^2 \frac{-\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + i^2 \frac{\sqrt{-\Delta}^2}{4a^2} = 0$$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) = 0$$

$$\text{منه } z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ أو } z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

في كلتا الحالتين يمكن كتابة $z = \frac{-b-d}{2a}$; $z = \frac{-b+d}{2a}$ حيث d جذر مربع للعدد Δ

لتكن a و b و c أعدادا **حقيقية** بحيث a غير منعدم .

العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة $az^2 + bz + c = 0$

ليكن d جذر مربع للعدد Δ

إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين مختلفين هما $z = \frac{-b-d}{2a}$; $z = \frac{-b+d}{2a}$

إذا كان $\Delta = 0$ فإن للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حل وحيد هو $z = \frac{-b}{2a}$

أمثلة

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية

$$-2z^2 + 2z + 3 = 0 \quad -2z^2 - 3z + 2 = 0 \quad 2z^2 - (2 + 2\sqrt{2})z + \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 0$$

الحل

ليكن Δ مميز المعادلة $2z^2 - (2 + 2\sqrt{2})z + \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 0$

$$\Delta = \left(-(2 + 2\sqrt{2}) \right)^2 - 8 \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 12 - 8\sqrt{2} = 0$$

$$S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right\} \text{ ومنه}$$

$$z = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \text{ إذن}$$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2z^2 - 3z + 2 = 0$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$S = \left\{ -2; \frac{1}{2} \right\} \text{ ومنه}$$

$$z = \frac{3 - 5}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{3 + 5}{-4} = -2$$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2z^2 + 2z + 3 = 0$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 = (i2\sqrt{2})^2$$

$$z = \frac{-2 - i2\sqrt{2}}{-4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-2 + i2\sqrt{2}}{-4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \text{ إذن}$$

تمرين

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين

$$z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0 \quad z^2 - 6z + 12 = 0$$

2- أكتب العددين $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$ في شكلهما المثلثي

3- في المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ ، أنشئ $A(z_1)$ و $B(z_2)$ و $E(z_1 + z_2)$ ثم حدد طبيعة الرباعي $OAEB$ معللا جوابك

2/ صيغة موافر و تطبيقاتها

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = ([1; \alpha])^n = [1^n; n\alpha] = [1; n\alpha] = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$$

أ/خاصية

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

ب/ حساب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بدلالة $\cos \theta$ و $\sin \theta$ أنشطة

$$\text{أنشر } (\cos \theta + i \sin \theta)^3$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

و استنتج أن

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos^3 \theta + 3i(\cos^2 \theta) \sin \theta - 3(\cos \theta)(\sin^2 \theta) - i \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3(\cos \theta)(\sin^2 \theta) + i(3(\cos^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

$$\text{لدينا } (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$\text{ومنه } \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3(\cos \theta)(\sin^2 \theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\text{و } \sin 3\theta = 3(\cos^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

تمرين

* لتكن $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$ من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

3- الترميز الاسية وتطبيقاته مثلثية

أ/ الكتابة $e^{i\theta}$

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$ ، لكل عدد عقدي معياره 1 و عمدته θ أي

$$e^{i\theta} = [\cos \theta; \sin \theta]$$

أمثلة

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^0 = 1 \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

ب/ خاصية أساسية

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad \text{لكل عددين عقديين } \theta \text{ و } \theta'$$

ج/ الكتابة الاسية لعدد عقدي غير منعدم

$$z = [r, \alpha] = re^{i\alpha} \quad \text{لكل عدد عقدي غير منعدم } z \text{ معياره } r \text{ و عمدته:}$$

الحساب باستعمال الترميز الاسي

$$\text{ليكن } z \text{ و } z' \text{ عددين عقديين بحيث } z = re^{i\theta} \text{ و } z' = r'e^{i\theta'} \text{ حيث } r > 0 \text{ و } r' > 0$$

$$z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad z = r^n e^{in\theta}$$

أمثلة

باستعمال الترميز الاسي حدد معيار و عمدة كل من الاعداد العقدية التالية.

$$z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}} \quad z_2 = (1-i\sqrt{3})^4$$

$$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad 3+3i\sqrt{3} = 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$$

* لدينا

$$z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{6e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_2 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{-i\frac{4\pi}{3}} \quad \text{ومنه } 1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{* لدينا}$$

د/ صيغتا أولير و تطبيقاته

لكل عدد عقدي θ

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad e^{i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \quad 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \quad \text{منه و}$$

لكل عدد عقدي θ

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

و نسمي الصيغتين بصيغتي أولير

تطبيق: اخطاط حدودية مثلثية

اخطاط حدودية مثلثية هو تحويل الجداءات التي على شكل $\cos^n \theta$ أو $\sin^n \theta$ أو $\cos^n \theta \times \sin^m \theta$ الى مجموع حدود من شكل $a \cos \alpha \theta + b \sin \alpha \theta$ مثال نخطط $\cos^4 \theta$

$$\cos^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{i4\theta} + 4e^{i3\theta} \cdot e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta} \cdot e^{-i2\theta} + 4e^{i\theta} \cdot e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta})$$

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{16} (e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6) = \frac{1}{8} \times \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} + \frac{3}{8}$$

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

تمرين أخطط $\sin^4 \theta \times \cos^3 \theta$
-الدوران و الاعداد العقدية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا $[1; \alpha] = (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

نربط النقطة $M(z)$ من المستوى بالنقطة $M'(z')$ بالتحويل r حيث $z' - \omega = [1; \alpha](z - \omega)$

نحدد علاقة متجهة بين النقطتين M و M' ثم نحدد طبيعة r

نلاحظ أن $r(\Omega) = \Omega$

لتكن $M(z) = \Omega(\omega)$ و $M'(z')$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = [1; \alpha](z - \omega) \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = [1; \alpha] \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \left(\overline{\Omega M}; \overline{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overline{\Omega M}; \overline{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

إذن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

خاصية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)

حيث $z' - \omega = [1; \alpha](z - \omega)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

$$[1; \alpha] = (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

الدوران باستعمال الكتابة الاسية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)

حيث $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

تمرين

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحيهما

على التوالي هما : $z_B = 2$; $z_A = i$

I.

(1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B' بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.

(2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

(3) مثل النقط A و B و B' .

II.

نعتبر التحويل f الذي يحول كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + 1$.

(1) حدد لحق النقطة Ω الصامدة بالتحويل f .

(2) حدد طبيعة التحويل f و عناصره المميزة