

الأعداد العقدية

تمارين 1

- 1- حدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية $\frac{2i}{2-i} + \frac{(1-2i)^2}{i}$; $\frac{3-2i}{1+i}$; $\frac{1}{3-2i}$
- 2- أحسب $(1+i)^2$ واستنتج $(1+i)^{230}$
- 3- أحسب $\sum_{k=0}^{521} i^k$

تمارين 2

في المستوى العقدي نعتبر النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(-iz)$

- 1- نضع $z = x + iy$ حيث $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ و $i \neq z$ و $z \neq 1$

حدد الشكل الجبري للعددين $\frac{1-i \cdot \bar{z}}{i+i \cdot \bar{z}}$ و $\frac{1-z}{1+iz}$

- 2- حدد (E) مجموعة النقط B حيث A و C نقط مستقيمية

- 3- حدد مجموعة النقط B حيث $\frac{1-i \cdot \bar{z}}{i+i \cdot \bar{z}}$ عدد تخيلي صرف.

تمارين 3

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية $-2i \cdot \bar{z} + z = 1$ و $(1-i)z - 2\bar{z} = 1 - 5i$

و $2|z|^2 - z^2 = 3$ و $z \cdot \bar{z} + \bar{z} = 4 - 3i$

تمارين 4

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين

$$|z-2| = |z+2i| - 2 \quad \text{و} \quad |z-1+i| = 3$$

تمارين 5

أكتب على الشكل المثلي الأعداد عقدية $3 + i\sqrt{3}$ و $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ و $(1-i\sqrt{3})^{24}$

تمارين 6

نعتبر العددين العقدين $u = 2 - 2i$; $v = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

- 1- احسب معيار وعمدة كل من u و v
- 2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتج

$$\cos \frac{7\pi}{12} ; \sin \frac{7\pi}{12}$$

تمارين 7

نضع $u = -2 + 2i$

1- أحسب معيار وعمدة u

2- حل جبريا $z^2 = u$ و استنتج $\cos \frac{3\pi}{8}$; $\sin \frac{3\pi}{8}$

تمارين 8

نعتبر العدد العقدي $z = 1 + i\sqrt{3}$

بين أن النقط $A(z)$ و $B(-z)$ و $C(z^2)$ و $D\left(\frac{2}{z}\right)$ متداورة

تمارين 9

1- ليكن $z_0 = \left[1; \frac{2\pi}{5}\right]$ نضع $\alpha = z_0 + z_0^4$ و $\beta = z_0^2 + z_0^3$ أ- بين أن $1 + \alpha + \beta = 0$

ب- استنتج أن α و β حلي المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$

2- أ- حدد α بدلالة $\cos \frac{2\pi}{5}$

ب- حل المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ واستنتج $\cos \frac{2\pi}{5}$

ج- أنشئ النقط $A_0(1)$ و $A_1(z_0)$ و $A_2(z_0^2)$ و $A_3(z_0^3)$ و $A_4(z_0^4)$ حدد طبيعة $A_0A_1A_2A_3A_4$

تمارين 10

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط $A; B; I$ التي أحاقها على التوالي هي $1; 1-2i; -2+2i$. لتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

(1) أنشئ النقط $A; B; I$.

(2) حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C) . احسب شعاع الدائرة (C) .

(3) لتكن D النقطة ذات اللحق $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.

حدد الشكل الجبري للعدد z_D ثم بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C) .

(3) لتكن E ، النقطة ذات اللحق z_E ، التي تنتمي للدائرة

(C) و التي تحقق $\left(\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

(4) أ- حدد معيار وعمدة العدد $z_E + \frac{1}{2}$.

ب- استنتج أن $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

تمارين 11

نضع: $v = \frac{5-3iz}{2+iz}$ لكل z من $\mathbb{C} - \{2i\}$ و لتكن النقطة

$M(z)$ صورة z في المستوى العقدي.

(1) بين أن: $\forall z \in \mathbb{C} - \{2i\}, v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

(2) استنتج مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $v \in \mathbb{R}$.

تمرين 12

ليكن $(x; \alpha) \in \mathbb{R}^2$

أحسب $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(x + k\alpha)$ و $C_n = \sum_{k=0}^n \sin(x + k\alpha)$ (يمكن حساب $C_n + iS_n$)

تمرين 13

اختصر الكتابة $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

تمرين 14

ليكن $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

نعتبر المعادلة (E):

$$z \in \mathbb{C} \quad (1 + iz)^3 (1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3 (1 + i \tan \alpha)$$

1- ليكن z_0 حل للمعادلة (E)

أ- بين أن $|1 + iz_0| = |1 - iz_0|$

ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي

2- أ- أحسب $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$ بدلالة $e^{i\alpha}$

ت- نضع $z = \tan \theta$ حيث $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. استنتج حلول

المعادلة (E)

تمرين 15

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 + 2(1 + \cos \theta)z + 2(1 + \cos \theta) = 0 \quad (E) \quad \text{حيث}$$

$$\theta \in]-\pi; \pi[$$

1- حل المعادلة (E)

2- أحسب معيار وعمدة جذري المعادلة (E) (ناقش حسب

قيم θ)

تمرين 16

لكل عدد عقدي مخالف لـ i نضع $u = \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$

1- اثبت أن $[2\pi] \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{i\} : \arg u = -\arg z + 2\arg(z-i)$

و أن $|u| = |z|$

2- بين إذا كان $|z| = 1$ فإن $u = -i$

3- حدد مجموعة النقط $M(z)$ حيث u تخيلي صرف.

تمرين 17

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2 + z + 1 = 0$

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (F) : $z^2 = \bar{z}$

أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (F) فإن $z = 0$ أو $|z| = 1$

ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة : $z^3 = 1$ أو $z = 0$

3) حل المعادلة (F) في $\mathbb{C}$.

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$$

تمرين 18

1- حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

2- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

b. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث :

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

c. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)$

تمرين 19

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2z + 4 = 0$ (E)

2) اكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي.

3) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألقاها

على التوالي هي $z_A = 2$ و $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و

$$z_C = -1 - i\sqrt{3}$$

أ - بين أن : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC.

تمرين 20

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z) = z^3 + (3-i)z^2 + (6-2i)z + 4-4i$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 2z + 4 = 0$

2) بين أن $z_0 = -1 + i$ حل للمعادلة : $P(z) = 0$

3) أ - تحقق من أن : $P(z) = (z+1-i)(z^2 + 2z + 4)$

ب - استنتج الحلين الآخرين z_1 و z_2 للمعادلة : $P(z) = 0$

ج - حدد الترميز الأسّي لـ z_0 و z_1 و z_2 . (حيث $\Im_m(z_1) > 0$).

4) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م. $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ،

نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها هي على التوالي z_0 و z_1 و z_2

بين أن النقط A و B و C مستقيمية

5) نعتبر الدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{6}$. لتكن $M(z)$

نقطة من المستوى $(M \neq O)$ ، و النقطة $M'(z')$ صورتها

بالدوران R.

أ - بين أن : $\left|\frac{z'}{z}\right| = 1$ و $\arg \frac{z'}{z} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

ب - استنتج أن : $z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z$ (الكتابة العقدية لـ R)

ج - حدد لحق كل من A' و B' صورتي A و B بالدوران R

تمرين 21

1- بين أن $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$

2- $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. أحسب بدلالة $\tan \theta$ العدد $\frac{e^{i2\theta} - 1}{e^{i2\theta} + 1}$

تمرين 22

بين أن $e^{i\frac{\pi}{11}} + e^{i\frac{3\pi}{11}} + e^{i\frac{5\pi}{11}} + e^{i\frac{7\pi}{11}} + e^{i\frac{9\pi}{11}} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2 \sin \frac{\pi}{22}}$

استنتج $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

تمارين 23

- (1) حل في C المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
 (2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية C الحدودية :
 $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$
 أ- احسب $P(2i)$.
 ب- حدد العددين b و c بحيث : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$
 ج- حل في C المعادلة $P(z) = 0$
 (3) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م. $(O, \vec{u}, \vec{v})$
 نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي :
 $z = \sqrt{3} - i$ و $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = 2i$.
 ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
 أ - اكتب على الشكل المثلثي $\frac{z_C}{z_B}$ و $\frac{z_B}{z_A}$
 ب - بين أن الكتابة العقدية للدوران R هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$
 ت - بين أن $R(A) = B$ و $R(B) = C$
 ج - بين أن الرباعي $OABC$ معين.

تمارين 24

- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد
 ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D و E
 التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A = 1 - i$ و $z_B = 3 + i$
 و $z_C = -3$ و $z_D = 2$ و $z_E = -4$.
 نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة
 M' ذات الحق z' بحيث : $z' = (1+i)z + 1$
 (1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f
 على التوالي.
 (2) أ - بين أن $OMEM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان
 $z^2 - 3z + 3 = 0$.
 ب - حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 3z + 3 = 0$.
 (3) أ - عبر عن $z' + 4$ بدلالة z .
 ب - استنتج أن $|z' + 4| = |z - 2|^2$ ثم عبر $\arg(z' + 4)$ بدلالة
 $\arg(z - 2)$.
 ج - بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها
 D وشعاعها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f
 تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها وشعاعها.

تمارين 25

- نعتبر $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ و المعادلة (E) التالية:
 $(E): z \in \mathbb{C} \quad z^2 \cos^2 t - 4z \cos t + 5 - \cos^2 t = 0$
 1- حل المعادلة (E)
 2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم
 مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$
 M_1 و M_2 هما صورتا حلي المعادلة (E) في المستوى
 العقدي
 حدد مجموعة النقط M_1 و M_2 عندما يتغير t
 في $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ وأنشئها في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$

تمارين 26

- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم
 $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي
 هي : $z_A = 4 + i$; $z_B = 4 - i$; $z_C = -i$
 1. مثل النقط A و B و C
 2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2 . نسمي S صورة النقطة A
 بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة S .
 1. بين أن النقط A و B و C تنتمي إلى نفس دائرة (Γ)
 ينبغي تحديد مركزها وشعاعها . أرسم (Γ) .

تمارين 27

- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم
 $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على
 التوالي هما : $z_A = i$; $z_B = 2$
 I- حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي
 مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$.
 (1) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي
 مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.
 (2) مثل النقط A و B و B' .
 II - نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها
 z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث : $z' = (1+i)z + 1$.
 (1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f
 على التوالي.
 (2) أ - بين أنه $\frac{z' - z}{i - z} = -i$ لكل z مخالف للعدد i .
 ب - بين أن : $\left\{ \begin{array}{l} MM' = MA \\ \left(\frac{MA}{MM'} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$ لكل نقطة M مخالفة
 للنقط A .
 ج - استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M
 حيث $M \neq A$.
 (3) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث :
 $|z - 2| = \sqrt{2}$.
 (4) أ - بين أن : $(1+i)(z - 2) = z' - 3 - 2i$ لكل عدد
 عقدي z .
 ب - استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ)
 فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و
 شعاعها

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم
 $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط :

النقطة A ذات اللحق $a = 7 - i\sqrt{3}$.

النقطة B ذات اللحق $b = 5 + 3i\sqrt{3}$.

النقطة Q منتصف القطعة [OB] .

(1) أ- ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. حدد

الكتابة العقدية للدوران R .

ب- بين أن $R(A) = B$ ثم استنتج طبيعة أن المثلث OAB .

(2) حدد q لحق النقطة Q .

(3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون ABQK متوازي الأضلاع .

(4) بين أن $\frac{k-a}{k}$ تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟

(5) لتكن C النقطة ذات اللحق $c = \frac{2a}{3}$ ؟

أ- أحسب $\frac{k-b}{k-c}$.

ب- ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟

تمرين 29

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر
 $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن $A(-2+3i)$ و $B(1-3i)$ نقطتين .

نعتبر $M(z)$ حيث $z \neq -2+3i$ نضع $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1- أ- حدد علاقة بين عمدة z' و الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$

ب- حدد وأنشئ المجموعتين

$$(E_1) = \left\{ M(z) / \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$$

$$(E_2) = \{ M(z) / |z'| = 2 \}$$

2- حدد لحق النقطة المشتركة K للمجموعتين E_1 و E_2

تمرين 30

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين
 أ- $z^4 = 1$ (يمكن ملاحظة أن $(z^2-1)(z^2+1) = z^4 - 1$)

$$b - \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^4 = 1$$

(2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و ليكن A عددا عقديا .
 نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z :

$$(E): \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n = A$$

P و Q و M هي النقط ذات الألحاق i و -i و z على التوالي .

أ- بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$

ب- بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن

$$|A| = 1$$

ج- استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع

حلولها حقيقية .

تمرين 31

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
 $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على

التوالي هما : $z_A = 1$; $z_B = -2$.

نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعروف ب :

$$Z = \frac{z-1}{z+2}$$

(1) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل من
 الحالتين التاليتين :

أ- $|Z| = 1$ ب- $Z \in \mathbb{R}$

(2) أ- بين أنه لكل z مخالف ل -2 لدينا :

$$(Z-1)(z+2) = -3$$

ب- نعتبر النقطة M ذات اللحق z والنقطة M' التي

لحقها Z .

بين أن : $M' \neq A$ ثم حدد $AM' \times BM$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM})$

ج- علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها

B وشعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد

مركزها و شعاعها .

(3) أ- حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث

$$Z \in i\mathbb{R}$$

ب- لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع $d = \frac{1+2ix}{1-ix}$ و نسمي

D النقطة ذات اللحق d . حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{d-1}{d+2}$ ثم

استنتج أن النقطة D تنتمي ل (Γ) .

ج- ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi, \pi]$. نضع

$$f = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\theta}$$

و نسمي F النقطة ذات اللحق f .

* بين أن العدد $U = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ تخيلي صرف .

* بين أن $\frac{f-1}{f+2} = U$. ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟