الأعداد العقدية - الجزء الاول-

1- المجموعة $\mathbb{C}$
أ/مبرهنة

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$ و تحقق:

i) يحتوي $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي i و يحقق $i^2=-1$

ii) كل عنصر من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية و حيدة على الشكل: $a+ib$ بحيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

iii) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ و لهما نفس الخاصيات

ملاحظة: * $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

ب/ تساوي عددين عقديين

خاصية ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ $\quad a+ib=a'+ib'\Leftrightarrow a=a'$ و $b=b'$

برهان

* $a=a'$ و $b=b'$ $\Rightarrow a+ib=a'+ib'$ استلزام صحيح

* نعتبر $a+ib=a'+ib'$ و منه $i(b-b')=a'-a$

لنفترض أن $b\neq b'$ ومنه $i=\dfrac{a'-a}{b-b'}$

و حيث أن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ فان $\dfrac{a'-a}{b-b'}\in\mathbb{R}$

و بالتالي $i\in\mathbb{R}$ و هذا غير صحيح لان i عدد غير حقيقي

إذن افتراضنا خاطئ و منه $b=b'$ و بالتالي $a'-a=0$ إذن $a'=a$

ج/ اصطلاحات و تعاريف

* ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $Re(z)=a$.

العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $Im(z)=b$

الكتابة $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z

- نقول إن عددا عقديا عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان جزئه الحقيقي منعدما و جزئه تخيلي غير منعدم
- نقول إن عددا عقديا عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان جزئه التخيلي منعدما

أمثلة

حدد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد العقدي z في الحالات التالية

أ/ $z=\sqrt{2}-3i$ ب/ $z=5i-3$ ج/ $z=2\sqrt{3}i$ د/ $z=17$

د/ العمليات

ليكن عددين عقديين $z=a+ib$ و $z=a'+ib'$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

* الجمع $z+z'=(a+a')+(b+b')i$

* الضرب $z\cdot z'=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$

* $(a+ib)^2=(a^2-b^2)+2abi \qquad (a-ib)^2=(a^2-b^2)-2abi \qquad (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

* مقلوب عدد عقدي غير منعدم $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{bi}{a^2+b^2}$

* خارج عددين عقديين $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{a-bi}{a'+b'i}=\dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}$ حيث $z'\neq 0$

*** خاصيات العدد العقدي i**

ليكن $n\in\mathbb{Z}$

$i^n=1$ إذا كان $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ $\qquad i^n=i$ إذا كان $n=4k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$i^n=-1$ إذا كان $n=4k+2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ $\qquad i^n=-i$ إذا كان $n=4k+3$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تمرين

1- نحدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية $\frac{1}{2-3i}$; $\frac{3-2i}{2+i}$; $\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}$

$$\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

$$\frac{3-2i}{2+i}=\frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-2-3i-4i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i$$

$$\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}=\frac{2i(3+i)}{10}-i(1-4-4i)=\frac{3}{5}i-\frac{1}{5}+3i-4=-\frac{21}{5}+\frac{18}{5}i$$

2- نحسب $(1+i)^2$ و نستنتج $(1+i)^{230}$

$$(1+i)^2=2i$$

$$(1+i)^{230}=(2i)^{115}=2^{115}i^{4\times 28+3}=-2^{115}i$$

3- نحل المعادلة $2iz-3i+2=z+i$ $z\in\mathbb{C}$

$$2iz-3i+2=z+i \Leftrightarrow (1+2i)z=-2+4i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2+4i}{1+2i}=\frac{-2(1-2i)(1-2i)}{5}=\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$$

إذن $S=\left\{\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right\}$

2- التمثيل الهندسي لعدد عقدي- لحق متجهة

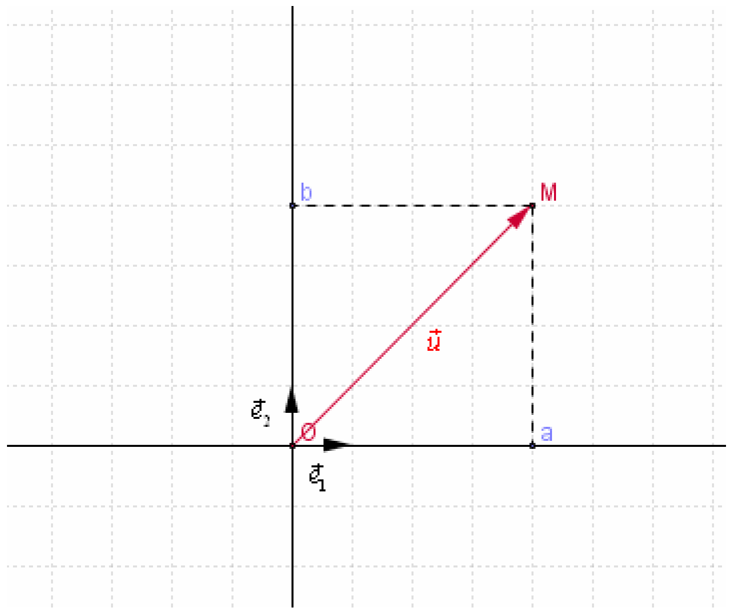
المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(a;b)$ من المستوى (P) هي صورة عدد عقدي وحيد $z=a+ib$. نكتب $M(z)$

و $z=a+ib$ يسمى لحق $M(a;b)$. نكتب $z=aff(M)$

كل متجهة $\vec{u}(a;b)$ من المستوى هي صورة عدد عقدي وحيد $z=a+ib$. نكتب $\vec{u}(z)$

العدد العقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}(a;b)$ نكتب $z=aff(\vec{u})$



ملاحظة و مصطلحات

* الأعداد الحقيقية هي ألحاق نقط محور الافاصيل الذي يسمى المحور الحقيقي
* الاعداد التخيلية الصرفة هي ألحاق نقط محور الأراتيب الذي يسمى المحور التخيلي

*- لحق $\overrightarrow{AB}$

ليكن A و B لحقيهما $z_A = a + ib$ و $z_B = a' + ib'$ على التوالي

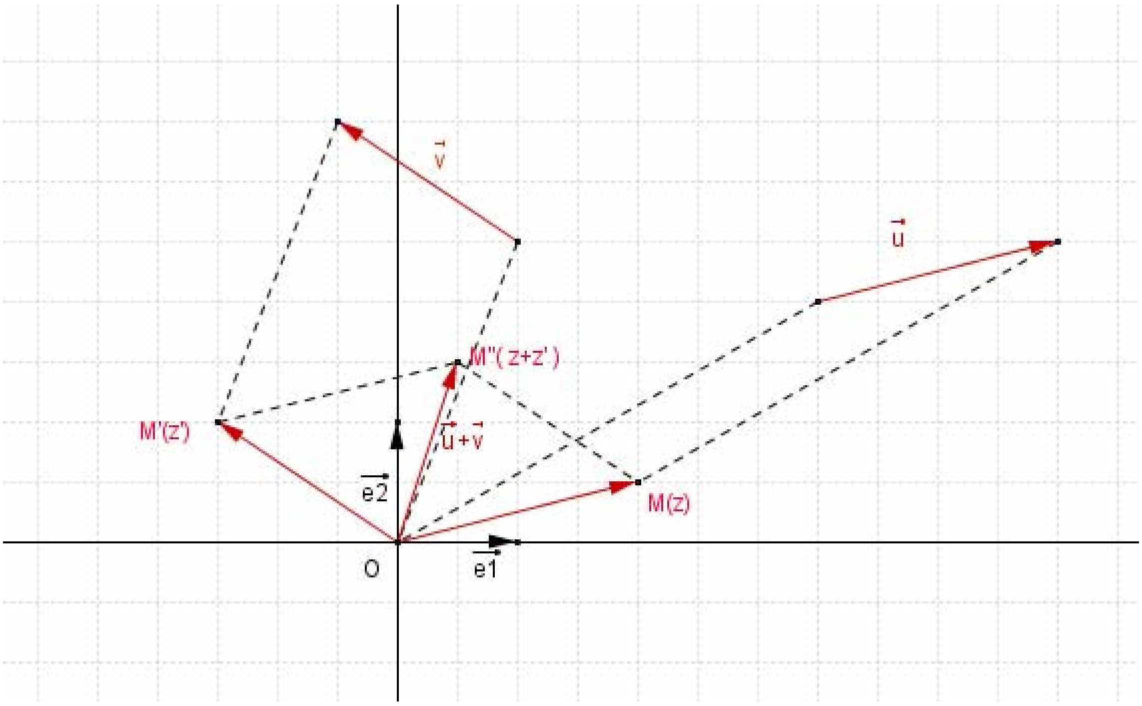
ومنه $A(a;b)$ و $B(a';b')$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}(a'-a;b'-b)$ أي

$$aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = (a'-a) + i(b'-b) = (a'+ib') - (a+ib) = z_B - z_A$$

لحق $\overrightarrow{AB}$ هو $z_B - z_A$ حيث $A(z_A)$ و $B(z_B)$

*- لحق $\vec{u}+\vec{v}$ و $\alpha\vec{u}$

نعلم أن اذا كان $\vec{u}(a;b)$ و $\vec{v}(a';b')$ فان $\vec{u}+\vec{v}(a+a';b+b')$ ومنه $aff(\vec{u}+\vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى و لكل عدد حقيقي α $aff(\vec{u}+\vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$

$aff(\alpha\vec{u}) = \alpha aff(\vec{u})$

تمرين

في المستوى العقدي أنشئ النقط A و B و C ألحاقها على التوالي $z_A = 2$

و $z_B = -1+4i$ و $z_C = -3i$ و المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $-1+3i$

*- استقامية النقط

النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \quad / \quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = aff\left(\lambda\overrightarrow{AC}\right) \quad / \quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z_B - z_A = \lambda(z_C - z_A) \quad / \quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \lambda \quad / \quad \exists\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

تكون النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

*- المرجح

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $G(z_G)$ نقط من المستوى العقدي و α و β عددين حقيقين حيث $\alpha+\beta\neq 0$

G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $(\alpha+\beta)z_G = \alpha z_A + \beta z_B$

ملاحظة
بنفس الطريقة نعرف مرجح ثلاث نقط أو أكثر
*- منتصف قطعة

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $I(z_I)$ نقط من المستوى العقدي

I منتصف $[A;B]$ إذا و فقط إذا كان $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

تمرين

بين أن النقط $A(1+i)$ و $B(1+3i)$ و $C\left(\frac{-1}{2}-2i\right)$ مستقيمية

الجواب

لدينا $\frac{\left(-\frac{1}{2}-2i\right)-(1+i)}{(2+3i)-(1+i)}=\frac{\frac{-3-6i}{2}}{1+2i}=\frac{(-3-6i)(1-2i)}{2(1+2i)(1-2i)}=\frac{-3+6i-6i-12}{10}=-\frac{3}{2}\in\mathbb{R}$

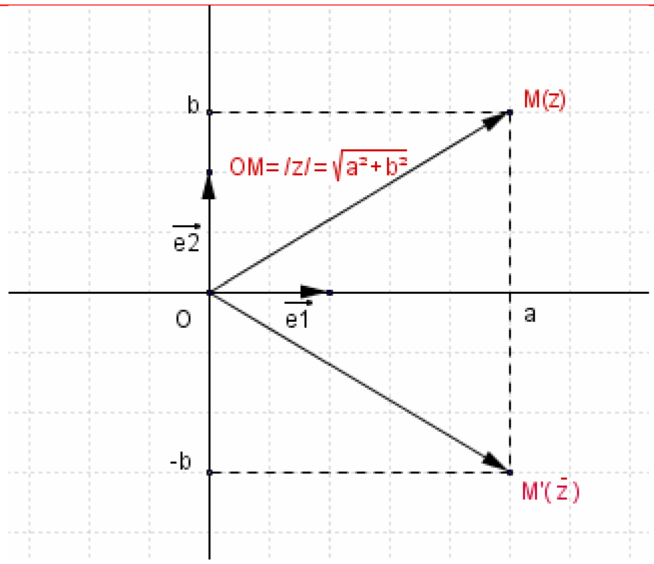
إذن A و B و C مستقيمية

3- المرافق و المعيار

أ/ تعريف

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

* العدد العقدي $z=a-ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z=a+ib$ ونرمز له بـ $\bar{z}=a-ib$.
* العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z=a+ib$. نرمز له بـ $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$



ملاحظة

* النقطتان $M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلتان بالنسبة لمحو الافاصيل
* إذا كان $z=a+ib$ فان $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$

ب/ خاصيات

ليكن عددين عقديين $z=a+ib$ و $z=a'+ib'$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

$$\overline{z+z'}=\overline{(a+a')+(b+b')i}=a+a'-(b+b')i=a-ib+a'-ib'=\bar{z}+\bar{z'}$$

$$\overline{z\cdot z'}=\overline{(aa'-bb')+(ab'+a'b)i}=aa'-bb'-ab'i-a'bi=a(a'-b'i)-bi(a'-b'i)=(a-bi)(a'-b'i)=\bar{z}\cdot\bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{a+bi}\right)}=\overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bi}{a^2+b^2}\right)}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a-ib}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

ومنه $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)}=\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

خاصيات

لتكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}^*$

* $\overline{\overline{z}}=z$
* $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}(z)i$; $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$
* $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=z$
* $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=-z$
* $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ $\quad\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$ $\quad\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$ $\quad\overline{\alpha z}=\alpha.\overline{z}$ $\quad z'\neq0$ $\quad\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

خاصيات

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ نقطتين من المستوى العقدي منسوب إلى المعلم $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

$\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A|$ $\qquad OA=|z_A|$

لتكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}^*$

* $|z|=0\Leftrightarrow z=0$
* $|z|=|-z|=|\overline{z}|$
* $|z.z'|=|z||z'|$ $\quad|z^n|=|z|^n$ $\quad\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ $\quad z'\neq0$
* $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

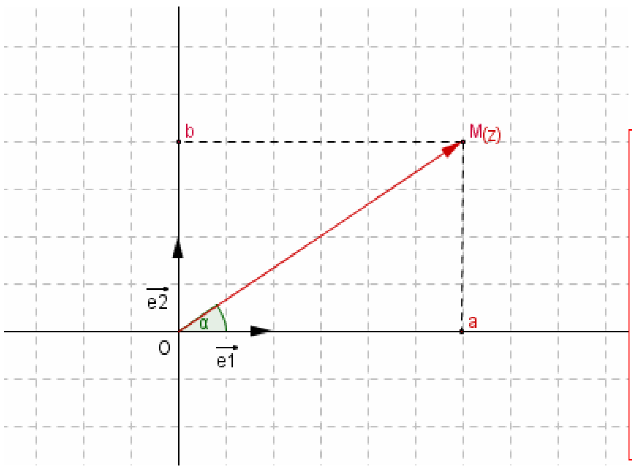
تمرين

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كـل حالة من الحالتين التاليتين

-1 $|z-1+i|=|2-i\sqrt{5}|$ $\qquad$ **-2** $|z-2|=|z+2i|$

4- الشكل المثلثي لعدد عقدي و العمدة

أ/ العمدة لعدد عقدي



المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و النقطة M صورته , وليكن α قياسا للزاوية $\left(\widehat{\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}}\right)$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z

نكتب $[2\pi]$ $\arg z\equiv\alpha$.

ملاحظة

* $\forall a\in\mathbb{R}^{+*}$ $\arg a\equiv0$ $[2\pi]$ $\qquad\forall a\in\mathbb{R}^{-*}$ $\arg a\equiv\pi$ $[2\pi]$
* $\forall b\in i\mathbb{R}^{+*}$ $\arg b\equiv\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ $\qquad\forall b\in i\mathbb{R}^{-*}$ $\arg b\equiv-\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

ب/ الكتابة المثلثية لعدد عقدي

-* ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعا و α عددا حقيقيا نضع $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

و منه $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ حيث $\sin\alpha=\frac{b}{r}$; $\cos\alpha=\frac{a}{r}$

إذن $[2\pi]$ $\arg z\equiv\alpha$

الكتابة $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z=[r,\alpha]$

أمثلة

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$15=[15;0] \qquad -2i=\left[2;-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$-\sqrt{3}-i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$$

ج/ خاصيات

ليكن $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ عددين عقديين غير منعدمين

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=(\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha\sin\alpha')+i(\sin\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\sin\alpha')$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha')$$

$$z\times z'=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))=[rr';\alpha+\alpha']$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\right)=\frac{1}{r}(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=\left[\frac{1}{r};-\alpha\right]$$

$$\frac{z}{z'}==z\times\frac{1}{z'}=[r;\alpha]\times\left[\frac{1}{r'};-\alpha'\right]=\left[\frac{r}{r'};\alpha-\alpha'\right]$$

$$\bar{z}=\overline{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=[r,-\alpha]$$

$$-z=r(-\cos\alpha-i\sin\alpha)r(\cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi))=[r,\alpha+\pi]$$

نبين أن $z^n=[r^n;n\alpha] \quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

ليكن $z=[r;\alpha]$ عدد عقدي غير منعدم

لنبين أولا $z^n=[r^n;n\alpha] \quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $z^0=1$ و $1=[1;0]=[1;0\times\alpha]$ اذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

لنفترض أن $z^n=[r^n;n\alpha]$ و نبين أن $z^{n+1}=[r^{n+1};(n+1)\alpha]$

$$z^{n+1}=z\times z^n=[r;\alpha]\times[r^n;n\alpha]=[r\times r^n;\alpha+n\alpha]=[r^{n+1};(n+1)\alpha]$$

إذن $z^n=[r^n;n\alpha] \quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{N}$

ليكن $n\in\mathbb{Z}^-$ ومنه $-n\in\mathbb{N}$

$$z^n=\frac{1}{z^{-n}}=\frac{1}{[r^{-n};-n\alpha]}=\left[\frac{1}{r^{-n}};-(-n\alpha)\right]=[r^n;n\alpha]$$

إذن $z^n=[r^n;n\alpha] \quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

خاصيات

ليكن $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ عددين عقديين غير منعدمين

* $z=z'\Leftrightarrow r=r' \quad et \quad \alpha=\alpha'$

* $\arg(zz')\equiv\arg z+\arg z' \quad [2\pi]$ و $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg z \quad [2\pi]$ و $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z' \quad [2\pi]$

$zz'=[rr',\alpha+\alpha']$ و $\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r};-\alpha\right]$ و $\frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$

* $\arg(\bar{z})\equiv-\arg z \quad [2\pi]$ و $\arg(-z)\equiv\pi+\arg z \quad [2\pi]$ $\qquad$ $\bar{z}=[r,-\alpha]$ و $-z=[r,\alpha+\pi]$

* $\arg(z^n)\equiv n\arg z \quad [2\pi] \quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

$z^n=[r^n;n\alpha] \quad \forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

تمرين

نعتبر العددين العقديين $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ و $u=2-2i$

1- احسب معيار وعمدة كل من u و v

2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتج $\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$

خاصية

ليكن $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$

-* توجد نقطة وحيدة M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ ومنه $M(z_B-z_A)$

و بالتالي $\arg(z_B-z_A)=\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{OM})}\quad[2\pi]$ إذن $\arg(z_B-z_A)=\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}$

-* $[2\pi]$ $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})}\equiv\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{CD})}-\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}\equiv\arg(z_D-z_C)-\arg(z_B-z_A)\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$

خاصية

إذا كان $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$ فان $\arg(z_B-z_A)=\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}\quad[2\pi]$

و $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})}\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\quad[2\pi]$

نتيجة

إذا كان $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $A\neq C(z_C)$ فان $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}\quad[2\pi]$

د/ تطبيقات

* **الاستقامية:** لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ نقط مختلفة

A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow \frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv 0\quad[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\pi\quad[2\pi]$

* **التعامد:** لتكن $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$

$$(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\quad ou\quad\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

تمرين

في المستوى العقدي المنسوب لمعلم.م.م.م $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

1). نعتبر النقط $A(6+2i)$ و $B(-1+3i)$ و $C\left(\frac{7}{2}-3i\right)$ حدد قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{BA};\overline{BC}}\right)$

2). نعتبر النقط $E(2+3i)$ و $F(1+2i)$ و $G(-1)$ حدد قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{FE};\overline{FG}}\right)$

تمرين: نضع $u_1=1-i$; $u_2=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1- حدد عمدة و معيار u_1 و u_2

2- حدد عمدة و معيار $\frac{u_1}{u_2}$ و استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

3- بين أن $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24}=1$

الحل

1- نحدد عمدة و معيار u_1 و u_2

$$u_1=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]$$

$$u_2=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{6}\right]$$

3- نحدد عمدة و معيار $\frac{u_1}{u_2}$ و نستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{6}\right]}=\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[1;\frac{-\pi}{12}\right]$$

لدينا $\frac{u_1}{u_2}=\frac{1-i}{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}=\frac{(2-2i)\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)i$$

ومنه $\left[1;\frac{-\pi}{12}\right]=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)i$

$\begin{cases}\cos\frac{-\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{-\pi}{12}=-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

3- نبين أن $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24}=1$

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24}=\left[1;\frac{\pi}{12}\right]^{24}=\left[1;\frac{24\pi}{12}\right]=[1;2\pi]=1$$

تمرين

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ ، حدد معيار وعمدة الأعداد العقدية :

$a=-\cos\theta+i\sin\theta\quad;\quad b=\cos\theta-i\sin\theta\quad;\quad c=-\cos\theta-i\sin\theta$

$a'=\sin\theta+i\cos\theta\quad;\quad b'=\sin\theta-i\cos\theta\quad;\quad c'=-\sin\theta-i\cos\theta\quad;\quad d=-\sin\theta+i\cos\theta$

الجواب

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ ،

$$a=-\cos\theta+i\sin\theta=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)=[1;\pi-\theta]$$

$$b=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=[1;-\theta]$$

$$c=-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)=[1;\pi+\theta]$$

$$d=-\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\left[1;\frac{\pi}{2}+\theta\right]$$

$$a'=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left[1;\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

$$b'=\sin\theta-i\cos\theta=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\left[1;-\frac{\pi}{2}+\theta\right]$$

$$c'=-\sin\theta-i\cos\theta=\sin(\pi+\theta)+i\cos(\pi+\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\pi+\theta)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\pi+\theta)\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left[1;-\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

تمرين

نعتبر $a=-4$ و $z_1=2i$ و $z_1=2-2i$

1 – حدد الشكل المثلثي لـ a و z_1 و z_2

2– تحقق أن $a+z_1^2+z_2^4=-72$

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(a)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$

3- 1.3) بين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

2.3) حدد المجموعة (F) حيث $(F)=\left\{M(z)/|z+1+i|=\sqrt{10}\right\}$

3.3) تحقق أن A و B و C تنتمي إلى (F) ثم أنشئ BAC و (F)

الحل

2 – نحدد الشكل المثلثي لـ a و z_1 و z_2

$$a=-4=[4;\pi] \quad \text{و} \quad z_1=2i=\left[2;\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{و} \quad z_2=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

4.2 – نتحقق أن $a+z_1^2+z_2^4=-72$

$$a+z_1^2+z_2^4=[4;\pi]+\left[2;\frac{\pi}{2}\right]^2+\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^4=[4;\pi]+[2;\pi]^2+\left[\left(2\sqrt{2}\right)^4;-\pi\right]=-4-4-\left(2\sqrt{2}\right)^4=-4-4-64=-72$$

3- 1.3) نبين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

لدينا $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$

$$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})\equiv\arg\left(\frac{2-2i-2i}{-4-2i}\right)\equiv\arg\left(\frac{2-4i}{-4-2i}\right)$$

$$\equiv\arg\left(\frac{i(-2i-4)}{-4-2i}\right)\equiv\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

$$BA=|-4-2i|=\sqrt{20}\qquad BC=|2-4i|=\sqrt{20}$$

إذن المثلث BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

2.3) نحدد المجموعة (F)

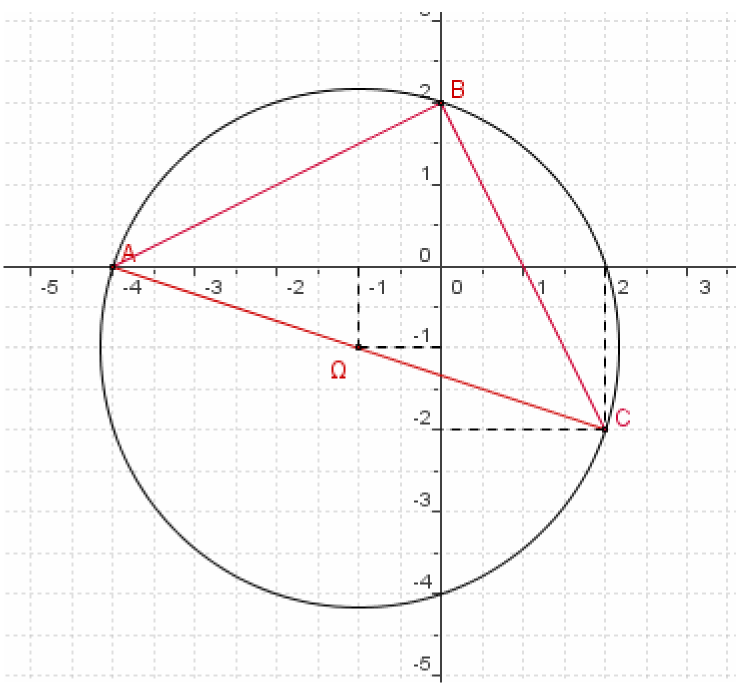
$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow|z+1+i|=\sqrt{10}$$

$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow \Omega M=\sqrt{10}\qquad /\Omega(1+i)$$

$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow M\in C\left(\Omega;\sqrt{10}\right)\qquad /\Omega(-1;-1)$$

$$(F)=C\left(\Omega;\sqrt{10}\right)\qquad /\Omega(-1;-1)$$

3.4) نتحقق أن $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$ تنتمي إلى (F) و ننشئ BAC و (F)



$$\Omega A=|-4+1+i|=|-3+i|=\sqrt{10}$$

$$\Omega B=|2i+1+i|=|1+3i|=\sqrt{10}$$

$$\Omega A=|2-2i+1+i|=|3-i|=\sqrt{10}$$

إذن A و B و C تنتمي إلى (F)

تمرين

في المستوى العقدي نعتبر النقط : $A(1+i)$ و B بحيث : $OA=OB$ و $[2\pi]$ $\quad \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{3}$

1) اعط الشكل الجبري ل z_B.
2) احسب المسافة AB .
3) حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$

الجواب

1) نعطي الشكل الجبري ل z_B.

$$|z_B| = OB = OA = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \text{ و منه } \quad 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\arg(z_B) \equiv \overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{OB})} \equiv \overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{OA})} + \overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} \equiv \arg(1+i)+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi]$$

ومنه $\quad z_B = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

إذن $\quad z_B = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) نحسب المسافة AB .

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1\right)^2} == \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

3) نحدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B-z_A) \equiv \arg\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1-i\right) \equiv \arg\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)+i\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\right]\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}\left[-\sin\frac{7\pi}{12}-i\cos\frac{7\pi}{12}\right]\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right]\right) \equiv \arg\left(\left[\sqrt{2};-\frac{13\pi}{12}\right]\right) \equiv -\frac{13\pi}{12} \equiv \frac{11\pi}{12} \quad [2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي لـ $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$ هو $\frac{11\pi}{12}$

تمرين

نعتبر المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

وليكن f المعرف على $\mathbb{C}^*$ بـ $f(z) = \frac{\overline{z}+i}{z}$

1- حدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)| = 1$

2- نضع $z = \cos\theta + i\sin\theta$ حيث $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

أ- مثل النقط $A(i)$ و $B(z)$ و $C(\overline{z})$ و $D(\overline{z}+i)$

ب- تحقق أن $OCDA$ معين و استنتج عمدة $\overline{z}+i$ بدلالة θ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ

ج- حدد معيار $f(z)$ بدلالة θ

الحل

1- نحدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)|=1$.

ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ و $(x;y)\neq(0;0)$

$$\overline{z}+i=x+-iy+i=x+i(1-y)$$

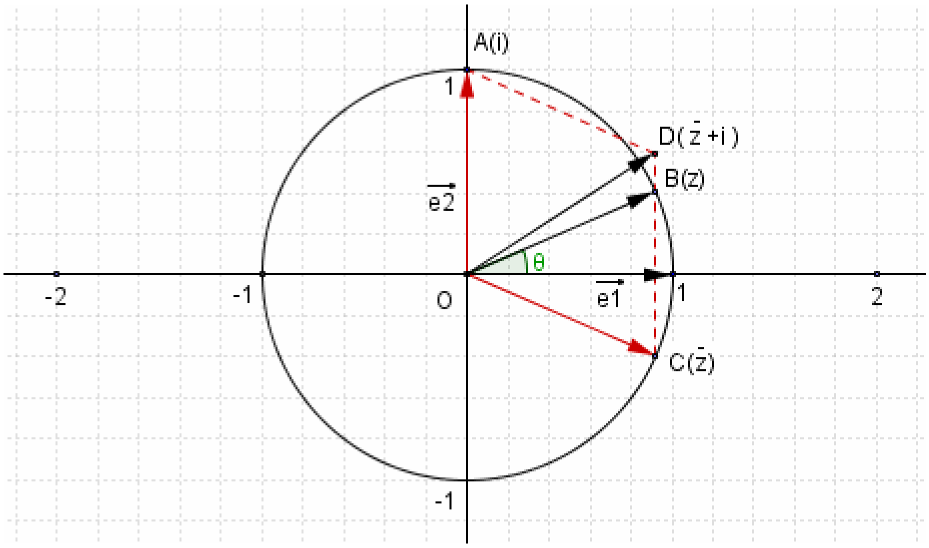
$$|f(z)|=1\Leftrightarrow\left|\frac{\overline{z}+i}{z}\right|=1\Leftrightarrow|\overline{z}+i|=|z|\Leftrightarrow x^2+(1-y)^2=x^2+y^2\Leftrightarrow 2y-1=0$$

إذن مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)|=1$ هي المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}$

2- نضع $z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

أ- نمثل النقط $A(i)$ و $B(z)$ و $C(\overline{z})$ و $D(\overline{z}+i)$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ و $B(z)$ و $C(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة لمحور الافاصيل



ب- نتحقق أن $OCDA$ معين و نستنتج عمدة $\overline{z}+i$ بدلالة θ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ

$AD=|\overline{z}|=1$; $CD=|i|=1$; $OA=|i|=1$; $OC=|\overline{z}|=1$ ومنه $OCDA$ معين

(OD) منصف $\left[\widehat{COA}\right]$ و منه: $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)\quad[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\arg(\overline{z})-\arg(i)\right)\equiv\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\quad[2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}+i)\equiv\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{OD}\right)\equiv\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)\quad[2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}+i)\equiv\arg(i)+\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\quad[2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}+i)\equiv-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$$

لدينا $\arg(f(z))=\arg\left(\frac{\overline{z}+i}{z}\right)$ و منه $\arg(f(z))\equiv\arg(\overline{z}+i)-\arg(z)\quad[2\pi]$

$$\arg(f(z))\equiv\frac{-\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\theta\equiv\frac{-3\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$$

ج- نحدد معيار $f(z)$ بدلالة θ

لدينا $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ومنه $|z|=1$

و بالتالي $|f(z)|=\left|\frac{\bar{z}+i}{z}\right|=|\bar{z}+i|=\sqrt{\left(\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2\right)}=\sqrt{2-2\sin\theta}$

4 - الإزاحة و التحاكي و الاعداد العقدية

أ/ الازاحة

نعتبر t إزاحة متجهتها $\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$ لتكن $M(z)$ و $M'(z')$

$$t(M)=M'\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(\vec{u})\Leftrightarrow z'-z=a\Leftrightarrow z'=z+a$$

خاصية

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z+a)$ من المستوى (P) هو الازاحة التي متجهتها $\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$

تمرين

1- نعتبر الازاحة $t_{\vec{u}}$ حيث $\vec{u}(1;2)$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي بحيث $t_{\vec{u}}(M)=M'$

أ/ حدد z' بدلالة z

ب/ في المستوى العقدي نربط كل $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z'=z+1-i$

بين ان M' صورة M بإزاحة و حدد متجهتها

ب/ التحاكي

نشاط

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و k عددا حقيقيا غير منعدم

نربط النقطة $M(z)$ من المستوى بالنقطة $M'(z')$ بالتحويل h حيث $z'-\omega=k(z-\omega)$

1/ حدد النقط الصامدة بـ h

2/ حدد علاقة متجهية بين النقطتين M و M' ثم حدد طبيعة h

خاصية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و k عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P) حيث $z'-\omega=k(z-\omega)$ هو التحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k

تمرين

في المستوى العقدي نربط كل $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z'=\frac{1}{2}z+-2i$

1/ حدد ω لحق النقطة Ω حيث $\omega=\frac{1}{2}\omega+-2i$

2/ بين ان M' صورة M بتحاك h محددا عناصره المميزة