الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

I. تقديم المجموعة $\mathbb{C}$:

01. نشاط:

لنعتبر المعادلة: $x\in\mathbb{R} : x^2+1=0$

1) هذه المعادلة: ليس لها حل في $\mathbb{R}$.وهذا يفرض علينا أن نستعمل العدد i وهو عدد تخيلي حيث $i^2=(-i)^2=-1$ ومنه نحصل على أن i و $-i$ حلين للمعادلة

2) لنعتبر المعادلة: $(E): x^2-2x+2=0$

باستعمال نفس خاصيات عمليتي الجمع و الضرب في $\mathbb{R}$ و العدد التخيلي i حيث $i^2=(-i)^2=-1$.

تحقق أن: المعادلة (E) تكتب على الشكل الآتي $(E):(x-1)^2+1=0$

تحقق بأن: $1+i$ و $1-i$ حلي للمعادلة (E)

02. مفردات:

- العدد i هو عدد تخيلي.
- العددان $1+i$ و $1-i$ نسميهما عددين عقديين و بصفة عامة
- نكتب عدد عقدي على الشكل $z=a+bi$ مع $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}$.

03. تعريف:

- عدد عقدي هو عدد يكتب على الشكل $z=a+bi$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و i يسمى عدد تخيلي يحقق $i^2=-1$.
- الأعداد العقدية تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها ب: $\mathbb{C}$.
- المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات. (التبادلية ؛ التجمعية .....)

04. مفردات :

- $a+bi$ يسمى عدد عقدي و نرمز له في الغالب ب : z
- المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية.
- الكتابة : $a+bi$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z او أيضا الشكل الجبري للعدد العقدي z
- العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي ل : z ونكتب: $\mathrm{Re}(z)=a$ مثال: $\mathrm{Re}(2-3i)=2$
- العدد الحقيقي b يسمى الجزء التخيلي ل : z ونكتب: $\mathrm{Im}(z)=b$ مثال: $\mathrm{Im}(2-3i)=-3$
- العدد العقدي $z'=a-bi$ يسمى مرافق العدد العقدي z ويرمز له ب : $z'=\overline{z}=a-bi$ مثال: $z=2-3i$ مرافقه هو $\overline{z}=\overline{2-3i}=2+3i$
- $b=b'$ و $a=a'$ $a+bi=a'+b'i \Leftrightarrow$.

II. العمليات على الأعداد العقدية :

ليكن : $z=x+yi$ و $z'=x'+y'i$ من $\mathbb{C}$

العملية : الجمع في $\mathbb{C}$	مثال
$z+z'=x+yi+x'+y'i=(x+x')+(y+y')i$	$z+z'=1+5i+2-3i=3+2i$
العملية : الضرب في $\mathbb{C}$	**مثال**
$z\times z'=(x+yi)\times(x'+y'i)=(xx'-yy')+(xy'+yx')i$	$z\times z'=(1+5i)\times(2-3i)$ $=1\times2+5i\times(-3i)+(1\times(-3)+5\times2)i=17+7i$

العملية : الضرب في $\mathbb{C}$ (حالة خاصة)	مثال
1) $k.z=k.(x+yi)=kx+kyi$ 2) $z\times\overline{z}=x^2+y^2$	1) $-3\times z=-3\times(1+5i)=-3-15i$ 2) $(2+3i)\times\overline{(2+3i)}=2^2+3^2=13$
المقلوب في $\mathbb{C}$ (نستعمل مرافق z')	مثال
$\frac{1}{z'}=\frac{1}{x'+y'i}=\frac{1\times\overline{z'}}{z'\overline{z'}}=$ $=\frac{1\times(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)}=\frac{x'}{x'^2+y'^2}-\frac{y'}{x'^2+y'^2}i$	$\frac{1}{z'}=\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{(2-3i)\times(2+3i)}$ $=\frac{2}{2^2+3^2}+\frac{3}{2^2+3^2}i=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
الخارج في $\mathbb{C}$ (نستعمل مرافق z')	مثال
$\frac{z}{z'}=\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{z\times\overline{z'}}{z'\times\overline{z'}}=\frac{1}{z'\times\overline{z'}}\times z\times\overline{z'}$ $=\frac{1}{x'^2+y'^2}\times(x+yi)(x'-y'i)$ $=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2}i$	$\frac{z}{z'}=\frac{1+5i}{2-3i}=\frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)\times(2+3i)}$ $=\frac{1\times2+5i\times3i}{2^2+3^2}+\frac{5i\times2+1\times3i}{2^2+3^2}$ $=\frac{-13}{13}+\frac{13}{13}i=-1+i$

❖ أمثلة: أحسب ما يلي:

- $z_1=2+5i-(-4+2i)=2+4+(5-2)=6+3i$
- $z_2=2+5i-3i(-4+2i)=2+5i+12i+6=8+17i$
- $z_3=(2+5i)(-4+2i)=2\times(-4)+5i\times2i+(2\times2+5\times(-4))i=-18-16i$
- $z_4=\frac{1}{1+3i}=\frac{1\times(1-3i)}{(1+3i)\times(1-3i)}=\frac{1-3i}{1^2+3^2}=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$
- $z_5=\frac{2+3i}{5-i}=\frac{(2+3i)\times(5+i)}{(5-i)\times(5+i)}=\frac{10-3+(2+15)i}{5^2+1^2}=\frac{7+17i}{26}=\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i$

❖ ملحوظة:

- $(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2$
- $(a-bi)^2=a^2-2abi+(-bi)^2=a^2-2abi-b^2$
- $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

III. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

01. نشاط:

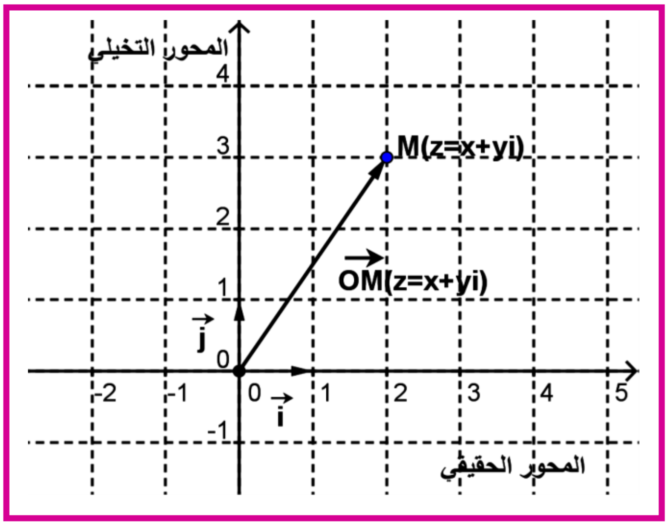
المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$

لنعتبر التطبيق

$$f:\quad \mathbb{C}\to(P)$$

$$z=x+yi\mapsto f(z)=f(x+yi)=M(x,y) \quad (\text{أي } \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j})$$

1) أنشئ النقط التالية M_1,M_2,M_3,M_4,M_5 صورة الأعداد التالية :



$z_1 = 3$ و $z_2 = 3i$ و $z_3 = -2-3i$ و $z_4 = 2+i$ و $z_5 = 2-i$

02. مفردات:

- المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ يسمى المستوى العقدي.
- النقطة $M(x,y)$ هي صورة العدد العقدي $z = x+yi$.

  نكتب: $M_{(z)}$ أو $M_{(x+yi)}$ نقرأ : النقطة M التي لحقها z. نكتب كذلك : z_M ونقرأ z لحق النقطة M.
- المتجهة $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ تسمى صورة العدد العقدي z .

  نكتب : $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $\overrightarrow{OM}(x+yi)$ نقرأ $\overrightarrow{OM}$ المتجهة التي لحقها z. نكتب كذلك : $z_{\overrightarrow{OM}}$ نقرأ z لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$.
- كل عدد عقدي حقيقي صرف z أي $(z = x)$ صورته النقطة $M(x,0)$ تنتمي لمحور الأفاصيل $(0,\vec{i})$ ولهذا $(0,\vec{i})$ يسمى المحور الحقيقي.
- كل عدد عقدي تخيلي صرف z أي $(z = yi)$ صورته النقطة $M(0,y)$ تنتمي لمحور الأراتيب $(0,\vec{j})$ ولهذا $(0,\vec{j})$ يسمى المحور التخيلي.

03. نتائج:

$A(z_A);B(z_A);C(z_C)$ و $I(z_I)$. أربع نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي: $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ و $z_C = x_C + y_C i$ و $z_I = x_I + y_I i$.

- المتجهة $\overrightarrow{AB}$ لحقها هو: $z_B - z_A$.
- المتجهة $k.\overrightarrow{AB}$ لحقها هو : $k\times(z_B - z_A)$
- I منتصف القطعة: $[A,B]$ لحق I هو: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- A و B و C نقط مختلفة مثنى مثنى هي مستقيمية $(\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB})$ يكافئ $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ و $k\in\mathbb{R}$. أو أيضا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$ (مع $z_B - z_A \neq 0$)

❖ نبرهن على أن : العدد العقدي $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$

A و B نقطتان من المستوى العقدي لحقاهما على التوالي $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$.

- $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ زوج إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- توجد نقطة وحيدة M من المستوى العقدي (P) حيث: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$. إذن: $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ هو زوج إحداثيتا النقطة M

ومنه : لحق النقطة M أو كذلك المتجهة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ هو العدد العقدي:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$
$$= (x_B + y_B i) - (x_A + y_A i) = z_B - z_A$$

خلاصة: العدد العقدي $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة: $\overrightarrow{AB}$.

04. مثال:

نعتبر $I(z_I)$ و $A(z_A = 2+i)$; $B(z_B = -2+i)$; $C(z_C = 5+xi)$ و $I(z_I)$ أربع نقط من المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1) أوجد z_{AB} لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

2) أوجد z_I لحق I منتصف القطعة $[AB]$.

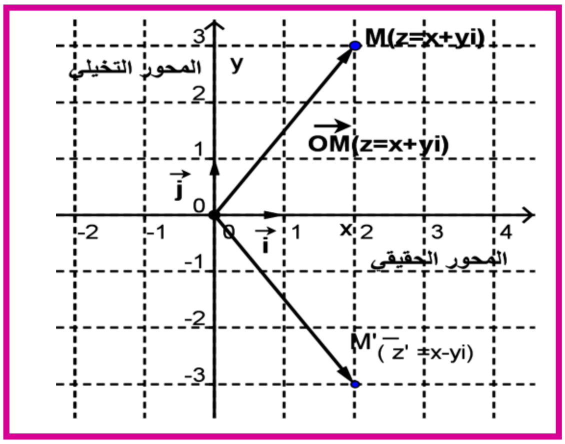
3) حدد x حيث النقط A و B و C مستقيمية.

IV. مرافق عدد عقدي :

01. تعريف:

ليكن $z = x+yi$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$.

العدد الحقيقي $x-yi$ يسمى مرافق العدد العقدي z و نرمز له ب: $\bar{z} = \overline{x+yi} = x-yi$.



02. أمثلة:

$z = 1+5i$ لدينا: $\bar{z} = \overline{1+5i} = 1-5i$

$z = -1-3i$ لدينا: $\bar{z} = \overline{-1-3i} = -1+3i$

$z = 1$ لدينا: $\bar{z} = \bar{1} = 1$

$z = 2i$ لدينا: $\bar{z} = \overline{2i} = -2i$

$z = -6i$ لدينا: $\bar{z} = \overline{-6i} = 6i$

03. خاصيات المرافق:

$z = x+yi$ و $z' = x'+y'i$ من $\mathbb{C}$

- $\bar{\bar{z}} = z$ و $z+\bar{z} = 2x$ و $z-\bar{z} = 2yi$
- $z\times\bar{z} = x^2+y^2$.
- $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$ و $\overline{z\times z'} = \bar{z}\times\bar{z'}$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $(z' \neq 0)$ و $\overline{z^p} = (\bar{z})^p$ مع p من $\mathbb{Z}$.

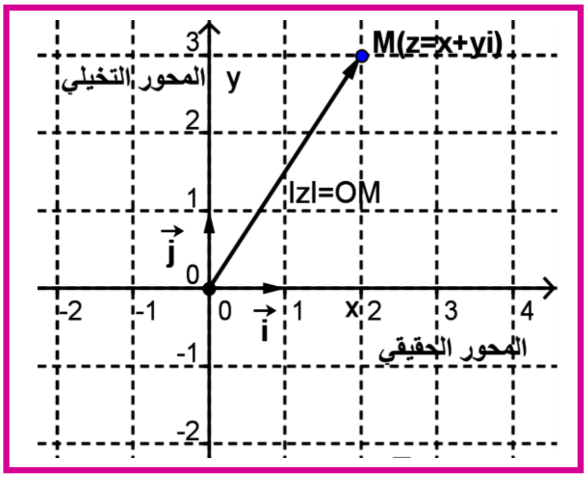
04. أمثلة:

- $\overline{\overline{2+3i}} = 2+3i$.
- $\overline{(2+3i)+1-2i} = \overline{2+3i}+\overline{1-2i} = 2-3i+1+2i = 3-i$.
- $\overline{(2+3i)\times(1-5i)} = \overline{2+3i}\times\overline{1-5i} = (2-3i)(1+5i)$.
- $\overline{\left(\frac{1}{1-5i}\right)} = \frac{1}{\overline{1-5i}} = \frac{1}{1+5i}$ و $\overline{\left(\frac{2+3i}{1-5i}\right)} = \frac{\overline{2+3i}}{\overline{1-5i}} = \frac{2-3i}{1+5i}$
- $\overline{(2+3i)^n} = (2-3i)^n$

05. ملحوظة:

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ ؛ (أي z عددا حقيقيا صرفا).
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ ؛ (أي z عددا تخيليا صرفا)

V. معيار عدد عقدي :



01. نشاط:

لتكن $M_{(z=x+yi)}$ نقطة من المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$

1) أوجد: $z \times \bar{z}$
2) أعطي كتابة للمتجهة $\overrightarrow{OM}$ في المعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$
3) أوجد $\|\overrightarrow{OM}\|$. ماذا تستنتج ؟

02. تعريف :

$z = x + yi$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\bar{z}}$ يسما معيار العدد العقدي $z = x + yi$. نكتب : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

03. التأويل الهندسي للمعيار

إذا كان $z = x + yi$ لحق M فإن: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\overrightarrow{OM}\|$ يمثل المسافة بين أصل المعلم و النقطة M .

04. أمثلة:

- $|5| = |5 + 0i| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$. $|-7| = |-7 + 0i| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$.
- $|2i| = |0 + 2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$. $|-2i| = |0 - 2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$
- $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

05. خاصيات المعيار:

$z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

- $|\bar{z}| = |-z| = |z|$ و $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ و $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $(z' \neq 0)$
- $|z^p| = |z|^p$ مع $p \in \mathbb{Z}$ و $z \neq 0$

06. أمثلة:

- $|\overline{1+i}| = |-1 - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$
- $|(1 - i) \times (2 + 3i)| = |1 - i| \times |2 + 3i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$

- $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{|1+i|}{|2|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $|-i+i| \le |-i|+|i| \Leftrightarrow 0 \le 1+1$
- $\left|(1+i)^6\right| = |1+i|^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$

07. تمرين:

أحسب معيار الأعداد العقدية: $z_1 = -5+3i$ و $z_2 = 4i(-2+3i)$ و $z_3 = 1+i\sqrt{3}$ و $z_4 = 5+i5\sqrt{3}$ و $z_5 = \dfrac{7}{1-i\sqrt{3}}$ و

$z_6 = \dfrac{4(1+i)}{2i\left(-5-i5\sqrt{3}\right)}$ و $z_7 = \dfrac{4(1+i)^2}{2i\left(-5-i5\sqrt{3}\right)^6}$

08. نتائج هندسية:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألحاقها $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ و $z_C = x_C + y_C i$ على التوالي مع $z_A \ne z_C$. لدينا :

- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\dfrac{AB}{AC} = \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$ ومنه : $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 = \dfrac{AB}{AC}$ المثلث ABC متساوي الساقين في A

09. مثال:

$C(z_C = 3i); B(z_A = -1+i); A(z_A = 1+i)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي.

1) نحسب أطوال أضلاع المثلث ABC .

لدينا:

- $AB = |z_B - z_A| = |-1+i-(1+i)| = |-2| = 2$.
- $AC = |z_C - z_A| = |3i-(1+i)| = |-1+2i| = \sqrt{5}$.
- $CB = |z_B - z_C| = |-1+i-(3i)| = |-1-2i| = \sqrt{5}$

2) ماهي طبيعة المثلث ABC.

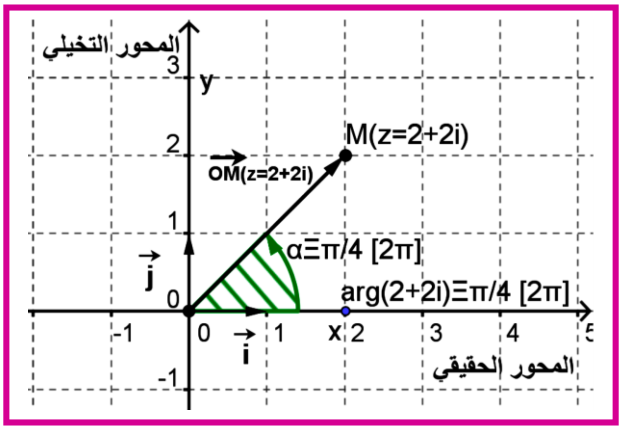
بمأن: $AC = CB$ المثلث ABC متساوي الساقين في C.

VI. عمدة لعدد عقدي غير منعدم:

01. نشاط:

لنأخذ عدد عقدي z غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي إذن: $M \ne O$

مثال: $z = 2+2i$ من $\mathbb{C}^*$.



02. تذكير:

- لنأخذ الزاوية الموجهة: $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$

- قياسات هذه الزاوية الموجهة هي: $\overline{\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ أو أيضا: $\overline{\left(\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right)} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

03. مفردات :

- $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ و هو يسمى عمدة العدد العقدي $z=2+2i$
- كذلك كل قياس من بين القياسات $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ (مع $k\in\mathbb{Z}$) للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي $z=2+2i$.
- نرمز للعمدة العدد العقدي الغير المنعدم $z=2+2i$ ب: $\arg(z)\equiv\overline{(\vec{i}\,,\,\overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$ أو $\arg(2+2i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
- كل عدد من بين الأعداد التي هي على شكل $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ هو كذلك عمدة العدد العقدي $z=2+2i$
- بصفة عامة نكتب: $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$ أو $\arg(z)=\alpha+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$
- ونفضل أخذ $\alpha\in]-\pi,\pi]$ (أي القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$) كعمدة للعدد العقدي الغير المنعدم z.
- العدد العقدي $z=0$ ليس له عمدة (لإن $M=O$ ضلع غير محدد لهذه الزاوية)

04. تعريف:

ليكن z عدد عقدي غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ إذن: $M\neq O$.

- كل قياس α للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي z ويرمز له ب: $\arg(z)$

نكتب: $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$ أو $\arg(z)=\alpha+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$

05. أمثلة:

1- أنشئ في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ النقط التالية: $M_{1(z_1=2)}$ و $M_{2(z_2=-3)}$ و $M_{3(z_3=2i)}$ و $M_{4(z_4=-3i)}$ و $M_{5(z_5=1+i)}$ و $M_{6(z_6=1-i)}$ و $M_{7(z_7=2+2i)}$ و $M_{8(z_8=-1-i)}$

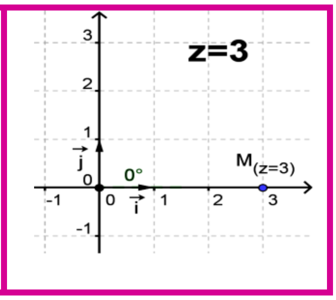
2- استنتج عمدة لحق النقط السابقة.

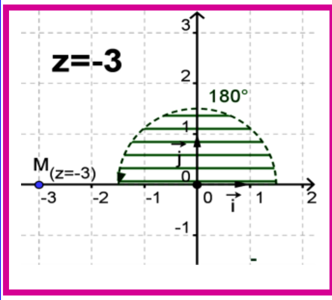
06. ملحوظة:

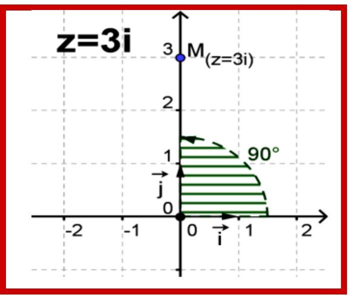
a و b من $\mathbb{R}$. $z\neq 0$ (أي $(a,b)\neq(0,0)$) حيث: $z=a+bi$ و $-z=-a-bi$ و $\bar{z}=a-bi$

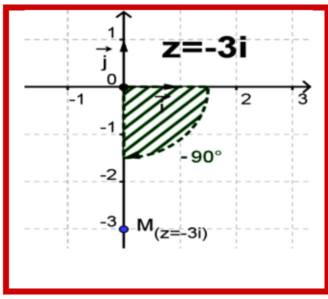
- $z=a>0$ لدينا: $\arg(a)\equiv 0[2\pi]$. مثال: $\arg(3)\equiv 0\ [2\pi]$.
- $z=a<0$ لدينا : $\arg(a)\equiv\pi[2\pi]$. مثال: $\arg(-3)\equiv\pi\ [2\pi]$.
- $z=bi\ ;\ b>0$ لدينا: $\arg(bi)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. مثال: $\arg(3i)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- $z=bi\ ;\ b<0$ لدينا: $\arg(bi)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. مثال: $\arg(-3i)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- $z\neq 0$ لدينا: $\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$. مثال: $\arg(2+2i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ و $\arg(-2-2i)\equiv\pi+\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- $z\neq 0$ لدينا: $\arg(\bar{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$. مثال: $\arg(2+2i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ و $\arg(\overline{2-2i})\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أمثلة مبيانيا:









07. خاصيات العمدة:

خاصية

ليكن z و z' من $\mathbb{C}^*$ لدينا:

- $\arg(z\times z')\equiv\arg z+\arg z'\ [2\pi]$
- $p\in\mathbb{Z}\ ;\ \arg(z^p)\equiv p\times\arg z\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z'}\right)\equiv-\arg z'\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'\ [2\pi]$
- إذا كان $k>0$ فإن: $\arg(kz)\equiv\arg(z)\ [2\pi]$.
- إذا كان $k<0$ فإن: $\arg(kz)\equiv\pi+\arg(z)\ [2\pi]$.

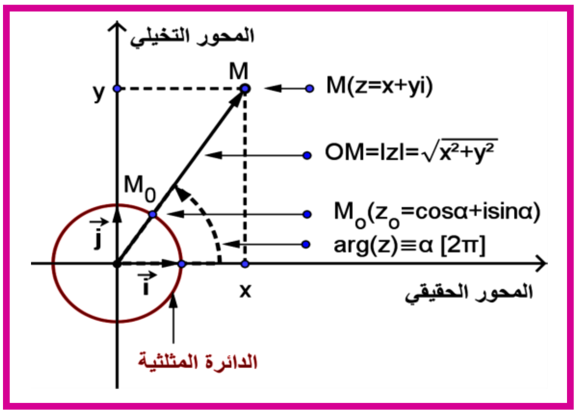
08. البرهان (انظر الشكل المثلثي و العمليات)

09. مثال:

أوجد عمدة : $z_1=1+i$ و $z_2=4i(1+i)$ و $z_3=(1-i)$ و $z_4=(1-i)(1+i)^8$ و $z_5=1-i\sqrt{3}$ و $z_6=\frac{(1+i)}{(1-i\sqrt{3})}$

VII. شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

01. نشاط:



المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم. م. م. م $(0,\vec{i},\vec{j})$.

- لنأخذ عدد عقدي $z=x+yi$ غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي (P) إذن: $M\neq O$ مع: $(\mathcal{C})$ $\arg(z)\equiv(\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OM})\equiv\alpha\ [2\pi]$
- الدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$ تقطع نصف المستقيم $[O,M)$ في M_0 و لحقها هو $z_0=\cos\alpha+i\sin\alpha$.
- لدينا : O و M و M_0 مستقيمية و $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM_0}$ لهما نفس الاتجاه و منه: $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OM_0}$ مع $k>0$ (لأن $M\neq O$)

* لحق $\overrightarrow{OM}$ هو $z=x+yi$. لحق $\overrightarrow{OM_0}$ هو $z_0=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

- لدينا : O و M و M_0 مستقيمية و منه: $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OM_0}$. إذن: $x+yi=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)\Leftrightarrow z=kz_0$.

نحصل على : $(1): x+yi = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

نحدد k: $z = kz_0$ إذن $|z| = |kz_0| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = |k||z_0| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = |k| = k$.

نحصل على: $(2): k = \sqrt{x^2+y^2}$

- حسب العلاقة (1) و (2) نحصل على العلاقة التالية: $z = x+yi = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

02. مفردات:

1) الكتابة : $(3): z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم $z = x+yi$.

2) الكتابة (3) : نكتبها كذلك على الشكل الآتي: $(3): z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = [\,|z|, \arg(z)] = [r, \alpha]$

03. تعريف وخاصية:

ليكن عدد عقدي $z = x+yi$ من $\mathbb{C}^*$ و $\arg(z) \equiv \alpha\ [2\pi]$ و $r = |z|$

- العدد العقدي z يكتب على شكل: $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ أو $z = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ أو $z = [\,|z|, \arg(z)] = [r, \alpha]$
- كل كتابة من الكتابات السابقة تسمى شكل مثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم z.

04. أمثلة:

نعطي الشكل المثلثي لـ:

- $z_1 = 2 = 2(1+0i) = 2(\cos 0 + \sin 0) = [2, 0]$. $z_2 = -5 = 5(-1+0i) = 5(\cos\pi + \sin\pi) = [2, \pi]$.
- $z_3 = 7i = 7(0+i) = 7\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \left[7, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $z_4 = -\frac{3}{5}i = \frac{3}{5}(0-i) = \frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{3}{5}, -\frac{\pi}{2}\right]$
- $z_5 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

05. ملحوظة: (1) الشكل المثلثي (حالات خاصة)

الشكل المثلثي $a > 0$ و $b > 0$	مثال
$z = a = [a, 0]$	$z = 3 = [3, 0]$
$z = -a = [a, \pi]$	$z = -3 = [3, \pi]$
$z = bi = \left[b, \frac{\pi}{2}\right]$	$z = 3i = \left[3, \frac{\pi}{2}\right]$
$z = -bi = \left[b, -\frac{\pi}{2}\right]$	$z = -3i = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$

لدينا : $z = [r, \alpha]$ و $-z = [r, \pi+\alpha]$ و $\bar{z} = [r, -\alpha]$ و $-\bar{z} = [r, \pi-\alpha]$

فإن: $z=1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $\bar{z}=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ و $-z=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}+\pi\right]=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

06. ملحوظة: $1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $1-i=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ و $z_3=1+\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و $z_4=1-\sqrt{3}=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$.

07. الشكل المثلثي و العمليات

z و z' من $\mathbb{C}^*$ حيث $z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ و $z'=[r',\alpha']=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$

- جداء z و z' : $z\times z'=[r,\alpha]\times[r',\alpha']=[r\times r',\alpha\times\alpha']$ أو $z\times z'=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$
  أو $zz'=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))$
- نتيجة لذلك: $z^n=[r,\alpha]^n=[r^n,n\alpha]$ أو $z^n=(r(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$

حالة خاصة: $r=1$ نحصل على : $[1,\alpha]^n=[1^n,n\alpha]=[1,n\alpha]$

أو أيضا: $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ هي تسمى صيغة موافر (formule de MOIVRE)

- مقلوب z' : $\frac{1}{z'}=\frac{1}{[r',\alpha']}=[r',-\alpha']$ أو $\frac{1}{z'}=\frac{1}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{1}{r'}(\cos(-\alpha')+i\sin(-\alpha'))$
- خارج z و z' : $\frac{z}{z'}=\frac{[r,\alpha]}{[r',\alpha']}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$ أو $\frac{z}{z'}=\frac{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha'))$
- $-z=-1\times z=[1,\pi][r,\alpha]=[r,\alpha+\pi]=r((\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)))$
- $\bar{z}=\overline{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=[r,-\alpha]$

Données clés

Naissance	26 mai 1667 Vitry-le-François (France)
Décès	27 novembre 1754 (à 87 ans) Londres (Angleterre)
Domicile	Angleterre
Nationalité	Français
Champs	Mathématiques
Institutions	*Royal Society*
Diplôme	Académie de Saumur
Renommé pour	Formule de Stirling Théorème de Moivre-Laplace Formule de Moivre

Abraham de Moivre en 1736

08. أمثلة:

نعط الشكل المثلثي ل:

- $i\times z=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times[r,\alpha]=\left[r,\frac{\pi}{2}+\alpha\right]$

- $z_1 = 3+3i = 3(1+i) = [3,0]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right] = \left[3\sqrt{2},0+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_2 = -3-3i = -3(1+i) = [3,\pi]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right] = \left[3\sqrt{2},\pi+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_3 = 2i(7+7i) = 14i(1+i) = \left[14,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right] = \left[14\sqrt{2},\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_4 = \dfrac{1}{-4-4i} = \dfrac{1}{-4(1+i)} = \dfrac{1}{[4,\pi]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]} = \dfrac{1}{\left[4\sqrt{2},\pi+\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\dfrac{1}{4\sqrt{2}},-\dfrac{5\pi}{4}\right] = \left[\dfrac{1}{4\sqrt{2}},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

09. تمرين : أعط الشكل المثلثي ل:

$z_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2 = -8-8\sqrt{3}i$ و $z_3 = \dfrac{5i}{-4-4i}$ و $z_4 = \left(-8-8\sqrt{3}i\right)^{15}$ و $z_5 = -\frac{5}{7}i\left(1+\sqrt{3}i\right)$.

10. ملحوظة: العلاقة التي تربط الشكل الجبري و الشكل المثلثي حيث $[|z|,\theta] = x+yi$ لدينا: $x = |z|\cos\theta$ و $y = |z|\sin\theta$

VIII. الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم:

01. تعريف:

> كل عدد عقدي z غير منعدم حيث: $z = [r,\alpha] = [|z|,\arg z]$
>
> نكتبه على شكل: $z = [r,\alpha] = re^{i\alpha}$ وتسمى الشكل الأسي للعدد z إذن: $z = [r,\alpha] = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}$
>
> وهذه الكتابة تحقق ما يلي: لكل α و β من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{Z}$
>
> $e^{i\alpha}\times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$; $\dfrac{1}{e^{i\beta}} = e^{i\beta}$; $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$; $\left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha}$.

02. مثال:

الشكل الأسي للأعداد العقدية التالية:

- $z_1 = 2 = 2e^{i0}$; $z_2 = -2 = 2e^{i\pi}$; $z_3 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_4 = -2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$
- $z_1 = 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$; $z_2 = 1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $z_3 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $z_4 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{6}i}$

03. صيغتا أولير: FORMULES D EULER

ليكن α من $\mathbb{R}$. و z و z' عدد عقدي معياره 1 و عمدته α

إذن: $z = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$ ومنه نستنتج أن:

$$\left.\begin{array}{l} z = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} \\ \bar{z} = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z+\bar{z} = 2\cos\alpha = e^{i\alpha}+e^{-i\alpha} \\ z-\bar{z} = 2i\sin\alpha = e^{i\alpha}-e^{-i\alpha} \end{array}\right.$$

Leonhard EULER
(Bâle 1707, Saint-Pétersbourg 1783)

La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de i, notation utilisée pour l'intensité en électricité.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

❖ صيغتا أولير

ليكن α من $\mathbb{R}$ و $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

كل صيغة تسمى صيغة أولير

Données clés

Naissance	15 avril 1707 Bâle (Suisse)
Décès	18 septembre 1783 (à 76 ans) Saint-Pétersbourg (Russie)
Nationalité	Suisse
Champs	Mathématiques et physique
Institutions	Académie des sciences de Russie Académie de Berlin
Renommé pour	Liste complète

Signature 

04. ملحوظة:

حسب صيغة موافر

$$z^n=[1,\alpha]^n=\left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha}=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

$$\left(\bar{z}\right)^n=[1,-\alpha]^n=\left(e^{-i\alpha}\right)^n=e^{-in\alpha}=\cos n\alpha-i\sin n\alpha$$

$$z^n+\left(\bar{z}\right)^n=2\cos n\alpha$$

$$z^n-\left(\bar{z}\right)^n=2i\sin n\alpha$$

$$z^n\times\left(\bar{z}\right)^n=\left(z\times\bar{z}\right)^n=\left(1^2\right)^n=1$$

❖ صيغ :

$z^n+\left(\bar{z}\right)^n=2\cos n\alpha$ و $z^n-\left(\bar{z}\right)^n=2i\sin n\alpha$ و $z^n\times\left(\bar{z}\right)^n=1$

05. تطبيق : الإخطاط :

أخطط : $\cos^3 x$

لدينا: $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$. حسب صيغة اولير:

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^3=\frac{1}{2^3}\left(z+\bar{z}\right)^3=\frac{1}{8}\left(z^3+3z^2\bar{z}+3z\left(\bar{z}\right)^2+\left(\bar{z}\right)^3\right)=\frac{1}{8}\left(z^3+\left(\bar{z}\right)^3+3z\bar{z}\times\left(z+\bar{z}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos 3x+3\times1\times2\cos x\right)=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$$

خلاصة: $\cos^3 x=2\cos 3x+6\cos x$

IX. الأعداد العقدية و الهندسة

01. زاوية محددة بمتجهتين و عمدة خارج لحقيهما:

❖ **خاصية:**

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ، ألحاقها z_A و z_B و z_C و z_D على التوالي لدينا:

- المسافة AB هي : $AB=|z_B-z_A|$.
- I منتصف القطعة $[AB]$ لحقها z_I هو : $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.
- المتجهة $\overrightarrow{AB}$ لحقها هو : z_B-z_A .

قياس الزاوية الموجهة ل :

- $\left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right)$ هو: $\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right)}\equiv\arg(z_B-z_A)\ [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ هو: $\overline{\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)}\equiv\arg(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A})\ [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ هو: $\overline{\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right)}\equiv\arg(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\ [2\pi]$
- استقامية ثلاث نقط : A و B و C يكافئ : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ أي $z_C-z_A=k\left(z_B-z_A\right)$ أي : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=k\in\mathbb{R}$ مع $A\neq B$
- استقامية ثلاث نقط : A و B و C يكافئ : $\arg(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A})\equiv\pi[2\pi]$ أو $\arg(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A})\equiv0[2\pi]$.
- استقامية متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يكافئ $\dfrac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}}$ عدد حقيقي صرف (مع $Z_{\vec{v}}\neq0$)
- تعامد متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يكافئ $\dfrac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}}$ عدد تخيلي صرف (مع $Z_{\vec{v}}\neq0$)
- $(AB)\ //\ (CD)$ يكافئ : $\arg(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv\pi\ [2\pi]$ أو $\arg(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv0\ [2\pi]$ (أي $\arg(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv0\ [\pi]$)
- $(AB)\perp(CD)$ يكافئ : $\arg(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. (أي $\arg(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$)
- النقط A و B و C و D متداورة أو مستقيمية يكافئ : $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$ أو .....

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	1. $AM=BM$ 2. M تنتمي لواسط $[AB]$	$\left\lvert\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\rvert=1$	المثلث ABC متساوي الساقين في A
$\lvert z-z_A\rvert=k\ (k>0)$	M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها $r=k$	$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\dfrac{\pi}{2}\right]=e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$	المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\dfrac{\pi}{2}\right]=re^{\pm\frac{\pi}{2}i}$	المثلث ABC قائم الزاوية في A	$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\dfrac{\pi}{2}\right]=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$	المثلث ABC متساوي الأضلاع

02.ملحوظة :

- $(\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta'+\sin\theta')=e^{i\theta}+e^{i\theta'}=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
- $(\cos\theta+\sin\theta)-(\cos\theta'+\sin\theta')=e^{i\theta}-e^{i\theta'}=2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
- $1+(\cos\theta+\sin\theta)=1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.
- $1-(\cos\theta+\sin\theta)=1-e^{i\theta}=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.