

تمرين 1: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6 ; \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. أحسب u_2 و u_3 .
- لتكن $(v_n)_{n \geq 1}$ المتتالية المعرفة بما يلي: $v_n = u_n + 18$.
2. بين أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.
3. حدد v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .
4. أحسب $\lim u_n$.

تمرين 2: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{11}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{4} \end{cases}$$

و نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي: $v_n = -1 + 2u_n ; \forall n \geq 1$.

1. أحسب v_1 .
2. برهن أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
3. عبر عن v_n و u_n بدلالة n .

تمرين 3: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0; u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

برهن بالترجع أن: $\forall n \geq 0; u_n = 3 - 2^n$.

تمرين 4: نضع:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 .
2. برهن بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \neq -1$.
3. نضع: $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

(a) بين أن متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.

(b) أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim v_n$.

(c) أحسب u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim u_n$.

تمرين 5: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن: $\forall n \geq 0; u_n \geq 2$.
2. بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.
3. استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.
4. أحسب $\lim u_n$.

تمرين 6: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_2 و u_3 .

2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي: $v_n = u_n - 5$.
أ. برهن أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية محددًا أساسها و حدّها الأول.

ب. عبر عن v_n بدلالة n ثم عن u_n بدلالة n .

ج. أحسب $\lim v_n$ ثم $\lim u_n$.

تمرين 7: نعتبر المتتالية المعرفة كالآتي: $\begin{cases} u_0 = 0 ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n ; & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ، و المتتالية المعرفة ب:

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad w_n = 5^n u_n ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. أ. بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية.

ب. أكتب v_n بدلالة n .

2. أ. بين أن $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية.

ب. أكتب w_n بدلالة n .

ج. استنتج u_n بدلالة n .

3. أ. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

ب. استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج. أحسب $\lim u_n$.

تمرين 8: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. أحسب u_1 .

2. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq u_n < 2\sqrt{3}$.

3. بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً. ماذا تستنتج؟

4. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب: $v_n = 12 - u_n^2$.

أ. بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددًا أساسها و حدّها الأول.

ب. أكتب u_n بدلالة n و استنتج $\lim u_n$.

تمرين 9: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي: $\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$.

2. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ، ماذا تستنتج؟

3. نضع: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$.

(a) بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددًا أساسها.

(b) أحسب u_n بدلالة n .

(c) أحسب $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^3$ بدلالة n .

تمرين 10: نعتبر المتتاليتين المعرفتين كالآتي:

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

نضع: $\forall n \in \mathbb{N}^*; w_n = u_n - v_n$.

1. بين أن $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية و حدد أساسها.

2. أكتب w_n بدلالة n .

3. أحسب $\lim w_n$.

4. أحسب $s_n = \sum_{k=1}^n w_k$ ، ثم حدد $\lim s_n$.

5. أكتب $u_{n+1} - u_n$ بدلالة w_n و استنتج u_{n+1} بدلالة n .

تمرين 11:

1. أدرس تغيرات الدالة $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$ على $I = [1; 5]$.

2. نعتبر المتتالية المعرفة كالتالي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(a) بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً.

(b) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}; u_n < 5)$.

(c) استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب $\lim u_n$.

تمرين 12:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]1, +\infty[$ ب: $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

1. بين أن: $\forall x \in]2, +\infty[; g(x) \geq 3$.

2. لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كالتالي: $\begin{cases} u_0 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(a) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n \geq 3$.

(b) بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ رتيبة و استنتج أنها متقاربة.

(c) أحسب $\lim u_n$.