



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

درس : الاشتقاق

1. الاشتقاق في نقطة الاشتقاق على اليمين و اليسار:

01. تعريف (تذكير) :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و $\ell \in \mathbb{R}$ نقول أن : الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كان :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \text{ أو أيضا: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

العدد ℓ يسمى العدد المشتق ل f في x_0 و يرمز له ب : $f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

02. خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 .

- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$
- كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0 . (العكس ليس دائما صحيح) .
- تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي a و توجد دالة ε حيث :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \forall x \in D_f \setminus \{x_0\} \quad \text{مع} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{و في هذه الحالة} \quad f'(x_0) = a.$$

03. الدالة التآلفية ل f بجوار x_0 :

■ تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 .

الدالة h المعرفة ب: $h(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماس ل f بجوار x_0 .

نكتب $f(x) \approx h(x)$ بجوار x_0 (أي h تقريب ل f بجوار x_0)

04. ملحوظة :

منحنى الدالة h هو المستقيم (T) المماس لمنحنى f في النقطة التي أفصولها x_0

05. نشاط 2 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -3x + 4 & ; x \geq 1 \\ f(x) = x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$

1. أدرس اشتقاق f على يمين $x_0 = 1$. ثم أنشئ نصف المماس.

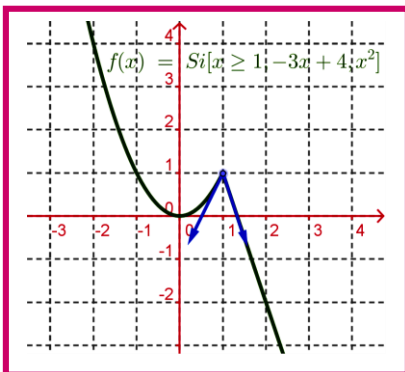
2. أدرس اشتقاق f على يسار $x_0 = 1$. ثم أنشئ نصف المماس.

3. هل f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$ ؟

4. حدد معادلتى نصفى المماس لمنحنى الدالة f على يمين و يسار النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$.

الجواب

بطريقة مبيانية



7:20 2015-09-08



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

درس : الاشتقاق

ملاحظة: النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$ تسمى نقطة مزواة .

06. تعريف: (الاشتقاق على يمين x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0, x_0 + \alpha]$ ، $(\alpha > 0)$

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين في } x_0 \text{ إذا كان } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$$

العدد $f'_d(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين x_0 لـ f .

07. تعريف: (الاشتقاق على يسار x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0 - \alpha, x_0]$ ، $(\alpha > 0)$

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على اليسار في } x_0 \text{ إذا كان } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g = f'_g(x_0) \in \mathbb{R}$$

العدد $f'_g(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسار x_0 لـ f .

08. خاصية:

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت ما يلي:

- f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 .
- f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 .
- العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار في x_0 أي $(f'_d(x_0) = f'_g(x_0))$.

09. تمرين تطبيقي :

أدرس اشتقاق f في x_0 (1 : $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $x_0 = 0$ على اليمين . (2 : $f(x) = |x-1|$ على يمين و على يسار $x_0 = 1$

II. اشتقاق دالة على مجال – الدالة المشتقة الأولى لدالة:

01. تعريف:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x_0 من $[a, b]$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$.
- f دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ إذا كانت
 - الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$
 - f قابلة للاشتقاق على اليمين في a .

02. الدالة المشتقة للدالة:

- تعريف:

الدالة التي تربط كل عنصر x_0 من المجال I بالعدد $f'(x_0)$ تسمى الدالة المشتقة لـ f ونرمز لها بـ f'

- ملحوظة :

إذا كان : $I = [a, b]$ و $I = [a, b[$ و $I =]a, b]$ نصطلح ان : $f'(a) = f'_d(a)$ و $f'(b) = f'_g(b)$

- مثال : الدالة المشتقة لـ $f(x) = x^3$ على $\mathbb{R}$ هي $f'(x) = 3x^2$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

درس : الاشتقاق

III. جدول الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية: (الجدول 1)

الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f'	الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f'
a	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$D_f = \mathbb{R}^{++}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} =]0, +\infty[$
x	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
x^n $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ $c \neq 0$	$\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ $c \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

IV. العمليات على الدوال المشتقة:

01. خاصيات: (الجدول 2)

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I .

الدالة	مشتقتها	شرط	الدالة	مشتقتها	شرط
$f + g$	$(f + g)' = f' + g'$	g لا تنعدم على I	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I
$\alpha \times f$	$(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$	$\alpha \in \mathbb{R}$	f^n	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$	$n \in \mathbb{N}^*$
$f \times g$	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$		f^n	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$	f و $n \in \mathbb{Z}^{*-}$ لا تنعدم على I
$\frac{1}{g}$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I	$\sqrt{g(x)}$	$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	g موجبة وقابلة للاشتقاق

02. أمثلة: أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية

أ- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ ب- $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$ ج- $f(x) = 2x \cos x$ د- $f(x) = 1 + (3x+2)^4$

V. الدالة المشتقة الثانية - المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة f .

1. مفردات:

- المشتقة ل f' تسمى المشتقة الثانية ل f . نرمز لها ب: $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$.
- إذا كانت $f^{(2)}$ بدورها قابلة للاشتقاق على I فدالتها المشتقة $(f^{(2)})'(x)$ تسمى المشتقة الثالثة ل f ونرمز لها ب $(f^{(2)})' = f^{(3)}$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.

4

الصفحة

درس : الاشتقاق

2. بصفة عامة :

المشتقة من الرتبة n للدالة f (أي $f^{(n)}(x)$) هي المشتقة لـ $f^{(n-1)}(x)$ (أي المشتقة من الرتبة $n-1$) $(f^{(n-1)}(x))$ ونرمز لها بـ:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

3. مثال:

أحسب $f^{(3)}(x)$ حيث : أ - $f(x) = x^5$ ب - $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ج - بين أن : $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

VI. مشتقة مركب دالتين - مشتقة الدالة العكسية

01. مشتقة مركب دالتين :

(1) مبرهنة 1 :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 .
ولدينا : $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

(2) مبرهنة 2 :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على I و $f(I)$ على التوالي
إذا كان x_0 عنصرا من I وكانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق في $f(I)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I .
ولدينا : $\forall x \in I : (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

(3) نتائج : (الجدول 3)

مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$
$D_{f'} = \mathbb{R}$	$-a \times \sin(ax+b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$\cos(ax+b)$	$x \in D_g$ $g(x) > 0$	$\frac{g'(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g$ $g(x) \geq 0$	$\sqrt{g(x)}$
$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$a \times [1 + \tan^2(ax+b)]$	$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan(ax+b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$a \times \cos(ax+b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$\sin(ax+b)$

(4) مثال:

أحسب $f'(x)$ مع أ - $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$. جواب : $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - x}\right)' = \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$

ب - $f(x) = \cos(2x - 4)$. جواب : $f'(x) = (\cos(2x - 4))' = (2x - 4)' \cos'(2x - 4) = -2x \sin(2x - 4)$

02. مشتقة الدالة العكسية

7:20 2015-09-08



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

درس : الاشتقاق

(1) مبرهنة 1 :

لتكن f متصلة و رتيبة قطعاً على I (إذن الدالة f تقابل من المجال I إلى المجال $J = f(I)$).
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$
لدينا : $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(2) برهان :

بمأن f متصلة على I إذن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $J = f(I)$ و منه لكل y_0 من J لدينا $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$
ندرس اشتقاق f^{-1} في y_0 من J . نضع $f^{-1}(y) = x$ و $f^{-1}(y_0) = x_0$ مع x و x_0 من I . لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R} ; (f'(x_0) \neq 0) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} ; (f^{-1}(y_0) = x_0) \\ &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} \end{aligned}$$

خلاصة : f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$ من $J = f(I)$ حيث : $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(3) مبرهنة 2 :

لتكن f دالة تقابل من المجال I إلى المجال $J = f(I)$.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على I (أي $\forall x \in I ; f'(x) \neq 0$) فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق
المجال $J = f(I)$. لدينا : $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(4) تطبيق 1 : مشتقة : $\sqrt[n]{x}$ و x^r و $g(x) = [f(x)]^r$. (الجدول 4)

$r \in \mathbb{Q}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$ و f موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على I

g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$	$g'(x) = \left((x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$	$g(x) = \sqrt[n]{x}$
	$g'(x) = (x^r)' = r x^{r-1}$	$g(x) = x^r$
g قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n} - 1}$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
	$g'(x) = ([f(x)]^r)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1}$	$g(x) = [f(x)]^r$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

درس : الاشتقاق

■ أمثلة: أحسب f' مع:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} \quad f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} \quad f(x) = \sqrt[5]{x}$$

جواب :

$$[f(x) = \sqrt[5]{x}]' = \left[x^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

$$[f(x) = \sqrt[5]{(x^2 + 1)}]' = \left[(x^2 + 1)^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} (x^2 + 1)^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} (x^2 + 1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} x (x^2 + 1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} x \sqrt[5]{(x^2 + 1)^4}$$

$$[f(x) = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^7}]' = \left[(x^2 + 1)^{\frac{7}{5}} \right]' = \frac{7}{5} (x^2 + 1)^{\frac{7}{5}-1} = \frac{7}{5} (x^2 + 1)^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5} x \sqrt[5]{(x^2 + 1)^2}$$

VII. تطبيقات الدالة المشتقة :

A. مطراف دالة عديدة قابلة للاشتقاق.

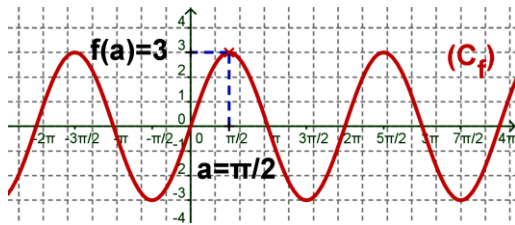
1. نشاط:

المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I .

(1) هل f تقبل مطراف في a ؟

(2) أعط قيمة لـ $f'(a)$. ثم أعط الخاصية.

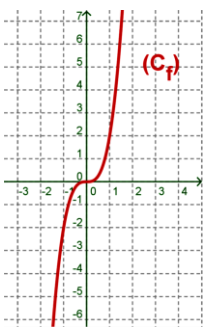
2. خاصية :



f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I .

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطراف في النقطة a فإن $f'(a) = 0$.

الدالة $f(x) = 2x^3$



3. ملحوظة : إذا كان $f'(a) = 0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن f (a) مطراف للدالة f .

4. مثال :

$f(x) = 2x^3$ لدينا : $f'(x) = 6x^2$ ومنه : $f'(0) = 0$. ولكن $f(0)$ ليس مطراف لـ f .

5. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I .

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a وتتغير إشارتها بجوار a فإن $f(a)$ مطراف لـ f .

B. إشارة المشتقة الأولى ورتابة دالة :

1. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

■ إذا كانت $f'(x) > 0 \forall x \in I$ فإن f تزايدية قطعاً على I . (يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقاط المنعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f)

■ إذا كان $f'(x) < 0 \forall x \in I$ فإن f تناقصية قطعاً على I . (نفس الشيء يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقاط المنعزلة من I)

■ إذا كان $f'(x) = 0 \forall x \in I$ (على I بكامله) فإن f ثابتة على I .

2. مثال :

أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}$ مع $f(x) = (2x+4)^2$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

درس : الاشتقاق

هل الدالة f تقبل مطراف .

جواب :

ندرس تغيرات الدالة f

(1) حساب f' :

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(2x+6)^4]' \\ &= 4(2x+6)'(2x+6)^3 \\ &= 4 \times 2(2x+6)^3 \\ &= 8(2x+6)^3 \end{aligned}$$

(2) إشارة f' :

إشارة f' هي إشارة $2x+6$

ومنه :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -3$$

إذن : f' موجبة على $[-3, +\infty[$ و سالبة على $]-\infty, -3]$ ومنه جدول تغيرات f .

(3) تغيرات الدالة f بواسطة الجدول التالي :

$$\text{لدينا : } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (2x+6)^4 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (2x)^4 = +\infty$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	$+\infty$		$+\infty$
f		$f(-3) = 0$	

مطارييف الدالة f :

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن الدالة f تقبل قيمة دنبا في النقطة التي أفصولها $x_0 = -3$