

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	الشعبة أو المسلك

تَعْلِيمات عَامَة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
 - يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
 - ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و توزع حسب المجالات كما يلي:

3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثاني
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثالث
11 نقطة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	المسألة

- بالنسبة للمسألة ، \ln يرمز لدالة اللوغاريتم التبيري.

التمرين الأول : (3 نقاط)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستوى (P) المار من النقطة $(1, 1, 1)$ ، المستوي (S) الذي مرّ بها النقطة $(-1, 1, 0)$ وشعاعها $\sqrt{2}$

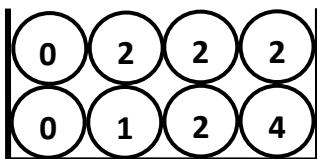
(1) أ- بين أن $x - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) 0.5

ب- بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) وتحقق من أن $(-1, 1, 0)B$ هي نقطة التماس. 0.75

(2) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A و العمودي على المستوى (P) 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $(1, 1, 0)C$ 0.75

(3) بين أن $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ و استنتاج مساحة المثلث OCB 0.75



التمرين الثاني : (3 نقاط)

يحتوي صندوق على ثمانى كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل جانبه. 0.5
نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاثة كرات من الصندوق.

(1) نعتبر الحدث A : " من بين الكرات الثلاث المنسوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد 0 ". 1.5

و الحدث B : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المنسوبة يساوي 8 ".

$$\text{بين أن } p(B) = \frac{1}{7} \text{ و أن } p(A) = \frac{5}{14}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المنسوبة.

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

$$\text{أ- بين أن } p(X = 16) = \frac{3}{28}$$

ب- الجدول جانبه يتعلق بقانون احتمال المتغير العشوائي X .
أتمم ملء الجدول بعد نقله على ورقة تحريرك معلمًا أجوبتك.

التمرين الثالث : (3 نقاط)

نعتبر العددين العقديين a و b بحيث $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - i$ 0.25

$$(1) \text{ أ- تحقق من أن } b = (1 + i)a$$

$$\text{ب- استنتاج أن } \arg b = \frac{5\pi}{12} \text{ و أن } |b| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ج- استنتاج مما سبق أن } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما a و b و النقطة C التي لحقها c بحيث $c = -1 + i\sqrt{3}$

$$\text{أ- تحقق من أن } c = ia \text{ و استنتاج أن } OA = OC \text{ و أن } \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ب- بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة \overrightarrow{OC} 0.5

ج- استنتاج أن الرباعي $OABC$ مربع . 0.5

المسألة : (11 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty]$ بما يلي :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1) تحقق من أن $0 = g(1)$

2) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g جانبه :

بين أن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $[0, 1]$ و أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $[1, +\infty]$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty]$ بما يلي :

و لتكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة :

1) بين أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة.

2) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- بين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من المجال $[0, +\infty]$

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $[0, 1]$ و تزايدية على المجال $[1, +\infty]$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty]$

4) أ- حل في المجال $[0, +\infty]$ المعادلة $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثي كل منها.

ج- بين أن $f(x) \leq x$ لكل x من المجال $[1, 2]$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على $[1, 2]$

5) أنشئ ، في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، المستقيم (D) و المنحنى (C) (قبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة

أقصولها محصور بين 2,4 و 2,5)

6) أ- بين أن $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$

ب- بين أن الدالة $h: x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ هي دالة أصلية للدالة $H: x \mapsto 2 \ln x - x$ على المجال $[0, +\infty]$

ج- باستعمال متكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$

د- احسب ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين

معادلتهما $x=1$ و $x=2$

III) نعتبر المتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \sqrt{3}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}

1) بين بالترجع أن $1 \leq u_n \leq 2$ لكل n من \mathbb{N}

2) بين أن المتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II) ج-)

3) استنتج أن المتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.