

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسالكيها	الشعبة أو المسلك

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
  - عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
  - يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
  - ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
  - بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمررين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

## مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتتوزع حسب المجالات كما يلى :

3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثاني
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثالث
11 نقطة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل والمتاليات العددية	المسألة

- بالنسبة للمسألة ،  $\ln$  يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

### التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعمد منظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين  $A(2, 1, 0)$  و  $B(-4, 1, 0)$  ليكن  $(P)$  المستوى المار من النقطة  $A$  و  $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$  متجهة منتظمة عليه.

يبين أن  $x + y - z - 3 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(P)$ .

2) لتكن  $(S)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق العلاقة  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

يبين أن  $(S)$  هي الفلكة التي مرّ بها النقطة  $(-1, 1, 0)$  وشعاعها  $\Omega$

3) أ- احسب مسافة النقطة  $\Omega$  عن المستوى  $(P)$  ثم استنتج أن  $(P)$  يقطع  $(S)$  وفق دائرة  $(C)$

ب- يبين أن مركز الدائرة  $(C)$  هو النقطة  $H(0, 2, -1)$

4) يبين أن  $OHB = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$  ثم استنتاج مساحة المثلث  $OHB$

### التمرين الثاني : (3 ن)

I- نعتبر العدد العقدي  $a$  بحيث  $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1) يبين أن معيار العدد العقدي  $a$  هو  $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

2) تتحقق من أن  $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$

3) أ- يأخذ  $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$  ، حيث  $\theta$  عدد حقيقي ، يبين أن  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

ب- يبين أن  $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$  (نذكر أن  $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$ )

ج- يبين أن  $a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$  هو شكل مثلي للعدد  $a$  ثم يبين أن  $i$

II- نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعمد منظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقطتين  $\Omega$  و  $A$  اللتين لحقاهما

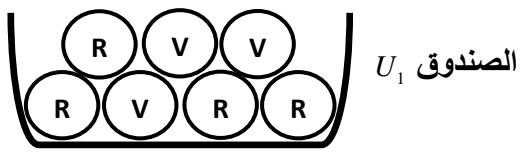
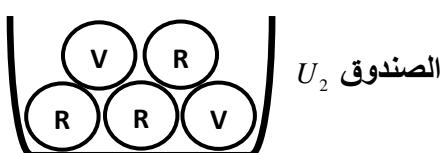
على التوالي هما  $\omega$  و  $a$  بحيث  $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  و  $\omega = \sqrt{2}$  و  $R$  الدوران الذي مرّ به  $\Omega$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$

1) يبين أن اللحق  $b$  للنقطة  $B$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$  هو

2) حدد مجموعة النقط  $M$  ذات اللحق  $z$  بحيث  $|z - 2i| = 2$

### التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق  $U_1$  على 7 كرات: أربع كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس) و يحتوي صندوق  $U_2$  على 5 كرات: ثلاثة كرات حمراء وكرتان خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)



I) نعتبر التجربة التالية: نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاثة كرات من الصندوق  $U_1$

ليكن  $A$  الحدث: " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين ".

و  $B$  الحدث: " الحصول على ثلاثة كرات من نفس اللون ".

يبين أن  $p(B) = \frac{12}{35}$  و  $p(A) = \frac{1}{7}$

II) نعتبر التجربة التالية: نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من  $U_1$  ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من  $U_2$

ليكن  $C$  الحدث: " الحصول على ثلاثة كرات حمراء ".

يبين أن  $p(C) = \frac{6}{35}$

المشكلة : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  بحيث :

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

ولتكن  $(C_f)$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في معلم متعدد منظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة :  $2 \text{ cm}$ )

(I) بين أن  $D_f = ]0, e[ \cup ]e, +\infty]$  هي مجموعة تعريف الدالة  $f$  0.5

(2) أ- احسب  $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} f(x)$  و  $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} f(x)$  و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . 0.75

ب- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم استنتج أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مقاربا بجوار  $+\infty$  يتم تحديده . 0.5

ج- بين أن  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  ثم أول هندسيا النتيجة ( لحساب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  لاحظ أن  $x \ln x \rightarrow 0$  ) 0.5

(3) أ- بين أن  $D_f = \left\{ x \mid x \neq \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} \right\}$  لكل  $x$  من 0.75

ب- بين أن الدالة  $f$  تناظرية على المجال  $[0, 1]$  و تزايدية على كل من المجالين  $[1, e]$  و  $[e, +\infty)$  1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $D_f$  على 0.25

(II) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0, +\infty)$  بما يلي : 0.5

ولتكن  $(C_g)$  المنحني الممثل للدالة  $g$  في معلم متعدد منظم (انظر الشكل) 0.5

(1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة  $(E)$  التالية :  $g(x) = 0$  0.5

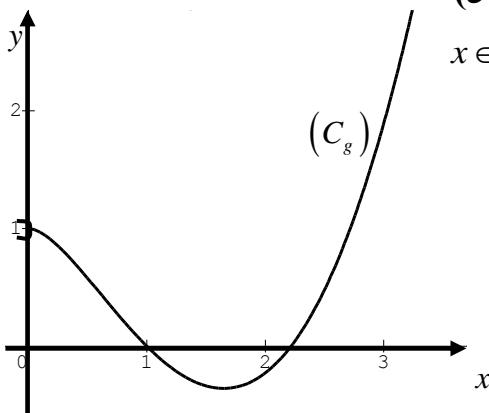
ب- نعطي جدول القيم التالي : 0.5

$x$	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة  $(E)$  تقبل حل  $\alpha$  بحيث  $2,2 < \alpha < 2,3$  0.5

(2) أ- تحقق من أن  $D_f = \left\{ x \mid x \neq \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} \right\}$  لكل  $x$  من 0.25

ب- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  يقطع المنحني  $(C_f)$  في نقطتين اللتين أقصولاهما 1 و  $\alpha$  0.5



ج- حدد ، انطلاقا من  $(C_g)$  ، إشارة الدالة  $g$  على المجال  $[\alpha, 1]$  و بين أن  $0 \leq f(x) \leq x$  لكل  $x$  من  $[1, \alpha]$  0.5

(3) أنشئ ، في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ، المستقيم  $(\Delta)$  والمنحني  $(C_f)$  1.25

(4) أ- بين أن  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$  ( لاحظ أن : ) 0.75

ب- احسب ، ب  $\text{cm}^2$  ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحني  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين 0.75

الذين معادلاتها  $x=1$  و  $x=\sqrt{e}$

(III) نعتبر المتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي : 0.5

(1) بين بالترجع أن  $1 \leq u_n \leq \alpha$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(2) بين أن المتالية  $(u_n)$  تناظرية ( يمكن استعمال نتيجة السؤال (II) ج- ) 0.5

(3) استنتاج أن المتالية  $(u_n)$  متقاربة و حدد نهايتها . 0.75