هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول:

1

لدينا الفلكة $(\mathcal{S})$ معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}) :\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$$

نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :

$$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)-11=0$$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-11=14$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;2;3)$ و شعاعها $R=5$.

2 أ

لدينا : $A(0;-2;0)$ و $B(1;1;-4)$ و $C(0;1;-4)$.

إذن : $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(0;3;-4)$.

و منه :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}3&3\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}1&0\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=0\vec{\imath}-(-4)\vec{\jmath}+3\vec{k}$$
$$=4\vec{\jmath}+3\vec{k}$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

فإن : المتجهتان $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعامدتان .

يعني أن : $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$

يعني : $\begin{pmatrix}x\\y+2\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}=0$

يعني : $0x+4(y+2)+3z=0$ يعني : $4y+3z+8=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 ب

لدينا : $\Omega(1,2,3)$ و $(ABC)\ :\ 4y+3z+8=0$

إذن : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|0+8+9+8|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{25}}=\sqrt{25}=5$

نلاحظ أن : $d(\Omega,(ABC))=R$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$

3 أ

علما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ منظمية على المستوى (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهتان مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}\ ;\ (\exists t\epsilon\mathbb{R})$

يعني : $(\Delta)\ :\ \begin{cases}x-1=0t\\y-2=4t\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})\\z-3=3t\end{cases}$

يعني : $(\Delta)\ :\ \begin{cases}x=1\\y=4t+2\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})\\z=3t+3\end{cases}$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لدينا : $\begin{cases}(ABC) : 4y+3z+8=0\\(\Delta) : \begin{cases}x=1\\y=2+4t\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})\\z=3t+3\end{cases}\end{cases}$

نعلم أن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

إذن : $\boxed{(\Omega H)\perp(ABC)}$ (1)

و نعلم كذلك أن : $\boxed{(\Delta)\perp(ABC)}$ (2) و $\boxed{\Omega\epsilon(\Delta)}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(\Omega H)=(\Delta)$ يعني : $H\epsilon(\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة H ننطلق من النظمة التالية : $\begin{cases}H\epsilon(\Delta)\\H\epsilon(ABC)\end{cases}$

و هذه النظمة تُكافئ : $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4t+2\\\gamma=3t+3\\4\beta+3\gamma+8=0\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

$$4(4t+2)+3(3t+3)+8=0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على : $t=-1$

نعوض t بالعدد -1 في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4(-1)+2=-2\\\gamma=3(-1)+3=0\end{cases}$$

و بالتالي : $H(1;-2;0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوى (ABC) .

3 ج

للتحقق من أن $H(1;-2;0)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$ يكفي أن نتحقق من أن مثلوث إحداثيات النقطة H يحقق كلا من معادلتي المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $\begin{cases}(\mathcal{S}) :\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0\\(ABC) : 4y+3z+8=0\end{cases}$

يكفي إذن أن نعوض x و y و z على التوالي بالأعداد 1 و -2 و 0 في معادلتي (ABC) و $(\mathcal{S})$ و نرى هل تتحقق المتساويات .

لدينا : $1^2+(-2)^2+0^2-2\times1-4(-2)-6\times0-11=0$

إذن : $H\ \epsilon\ (\mathcal{S})$

و لدينا كذلك : $4(-2)+3(0)+8=-8+8=0$

إذن : $H\ \epsilon\ (ABC)$

و بالتالي : H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني:

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}\,z+64=0$

لدينا : $\Delta=\left(-8\sqrt{3}\right)^2-4\times64=-64=(8i)^2$

إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$z_1=\frac{8\sqrt{3}-8i}{2}=4\sqrt{3}-4i\quad \text{و}\quad z_2=\frac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

2 أ

لدينا :
$$\begin{cases} aff(A) = a = 8i \\ aff(B) = b = 4\sqrt{3} - 4i \\ aff(C) = c = 2(4\sqrt{3} + 4i) \\ aff(M) = z \\ aff(M') = z' \end{cases}$$

و لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي : $\mathcal{R}_O\left(\frac{4\pi}{3}\right) : \begin{array}{lcl} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$: $(z' - 0) = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z - 0)$

ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(M) = M'$

يعني : $z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

2 ب

لدينا : $aff(A) \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -4i + 4\sqrt{3} = aff(B)$

حصلنا إذن على العلاقة التالية : $aff(A) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times aff(B)$

و هي نفسها الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$

و من تلك الكتابة نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = B$

2 ج

لدينا : $\dfrac{a-b}{c-b} = \dfrac{8i - (4\sqrt{3} - 4i)}{2(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)}$

$= \dfrac{12i - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 12i} = \dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}i - 1)}{4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3}i - 1)}{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i - 1)} = \dfrac{(\sqrt{3}i)^2 - 2(\sqrt{3}i) + 1^2}{(\sqrt{3}i)^2 - 1}$

$= \dfrac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-4} = \dfrac{-2}{-4} + \dfrac{-2\sqrt{3}i}{-4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$

إذن : $\dfrac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

2 د

حصلنا على : $\dfrac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases} \left|\dfrac{a-b}{c-b}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{a-b}{c-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |a-b| = |c-b| \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} BA = BC \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

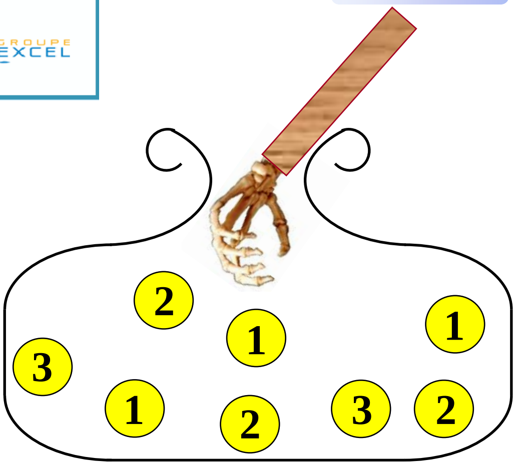
أو بتعبير آخر : $\begin{cases} BA = BC \\ A\hat{B}C = 60° \end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

و قياس الزاوية $\hat{B}$ هو $60°$.

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد C_8^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد C_7^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتمل $C_8^1 \times C_7^1$ نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_8^1 \times C_7^1 = 8 \times 7 = 56$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

C_3^1 إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

C_2^1 إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

<u>الحالة الأولى</u> : الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3 بـ $C_2^1 \times C_7^1$ إمكانية .

<u>الحالة الثانية</u> : الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3 بـ $C_6^1 \times C_2^1$ إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :

$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_6^1 \times C_2^1}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

2 أ

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا .

و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

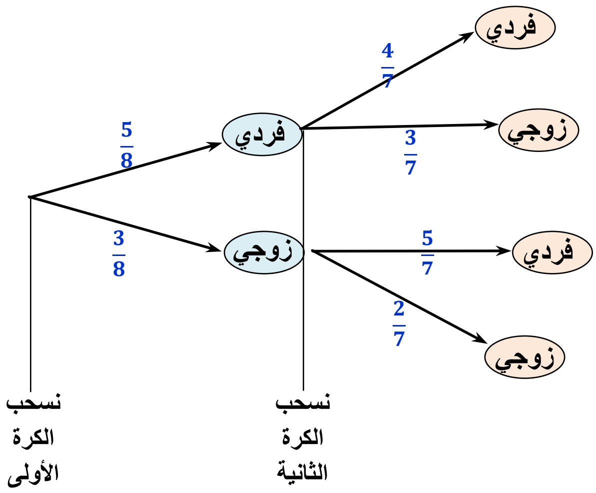
للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 أو 1 أو 2

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تَمَّ الحصول عليها انطلاقا من التجربة العشوائية (السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



2 ب

$p[X=1]$ هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X=1]=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}+\frac{15}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X التالي :

$P_X\ :\ \{0;1;2\}\longmapsto[0;1]$

لدينا حسب السؤال 1) : $p(A)=\frac{3}{28}$ إذن : $p[X=0]=\frac{3}{28}$

و لدينا كذلك : $p[X=2]=1-p[X=0]-p[X=1]$

$$=1-\frac{3}{28}-\frac{15}{28}=\frac{5}{14}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي : $P_X\ :\ \{0;1;2\}\longmapsto[0;1]$

$$0\longmapsto p[X=0]=\frac{3}{28}$$

$$1\longmapsto p[X=1]=\frac{15}{28}$$

$$2\longmapsto p[X=2]=\frac{5}{14}$$

التمرين الرابع :

1

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

لدينا : $u_0=1>0$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

إذن : u_n كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتين $3u_n$ و u_n+21 موجبتان قطعا كذلك .

إذن الكمية $\dfrac{3u_n}{u_n+21}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين .

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{3u_n}{21+u_n}>0$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>0$

يعني أن العبارة (P_{n+1}) عبارة صحيحة .

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $u_n>0$ إذن التعبير $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مُعَرَّف . (المقام يجب أن يخالف الصفر)

لدينا : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3u_n}{21+u_n}\times\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{3}{21+u_n}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3}{21+u_n}$

نعلم أن : $u_n>0$ إذن : $21+u_n>21$

يعني : $\dfrac{1}{21+u_n}<\dfrac{1}{21}$ يعني : $\dfrac{3}{21+u_n}<\dfrac{3}{21}$

يعني : $\dfrac{3}{21+u_n}<\dfrac{1}{7}$ يعني : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\dfrac{1}{7}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\dfrac{1}{7}\,u_n$

3

نعلم أن : $\frac{1}{7}<1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا u_n نحصل على :

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{7}u_n<u_n}$ (1)

و نعلم كذلك حسب السؤال 2) أن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n}$ (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<u_n$

و بالتالي : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ($u_n>0$) فإنها متقاربة .

4 أ

من أجل $n=0$. لدينا : $u_0=1\leq\left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال 2) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n\leq\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

4 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0<\ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن : $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

فإن : $\lim_{n\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \underset{\underset{0}{\swarrow}}{0} < u_n \leq \underset{\underset{0}{\swarrow}}{\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

و بالتالي : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول على الصفر . $\lim_{n\infty} u_n = 0$

التمرين الخامس :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :

$$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2$$
$$= 3x^3-x-2$$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$ إذن :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3-x-2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

I 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. يعني : $x>0$

إذن : $3x^2+3x+2>0$ و $x>0$

و منه : $\frac{3x^2+3x+2}{x}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا .

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

I 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

و لقد علمنا من قبلُ أن : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

إذن : إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$.

I 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x \leq 1$

يعني : $(x-1) \leq 0$ و منه : $g'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0,1]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x \geq 1$

و منه : $(x-1) \geq 0$ يعني : $g'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

I 3 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]0,1]$ يعني : $x \leq 1$

إذن : $g(x) \geq g(1)$ (لأن g تناقصية على $]0;1]$)

و لدينا : $g(1)>0$. إذن : $\boxed{\forall x \in]0;1]\ ;\ g(x)>0}$ (1)

الحالة الثانية : $x \in [1;+\infty[$ يعني : $x \geq 1$

إذن : $g(x) \geq g(1)$ (لأن g تزايدية على $[1;+\infty[$)

و لدينا : $g(1)>0$. إذن : $\boxed{\forall x \in [1;+\infty[\ ;\ g(x)>0}$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ g(x)>0$.

II 1

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

إذن :
$$f'(x) = 1 + \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2x(x-1+\ln x)}{x^4}$$
$$= 1 + \frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}$$
$$= 1 + \frac{-x^2+3x-2x\ln x}{x^4} = \frac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3}$$

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

نعلم حسب السؤال I 3) ب) : $(\forall x>0)\ ;\ g(x)>0$

و لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ x^3>0$

إذن : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{g(x)}{x^3}>0$

يعني : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)>0$

و بالتالي : f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II 2 أ

لدينا :
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to0^+}\left(x-1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{-\infty}\right)\right)$$
$$= 0-1+(+\infty)(1-\infty-\infty)$$
$$= -1+(+\infty)(+\infty) = -1-\infty = -\infty$$

و بالتالي : $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسيا هو : " المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين

II 2 ب

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$= 0(1-0+0) = 0$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x-1) + \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= (+\infty) + 0 = +\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ (1)

II 2 ج

لدينا : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{x-1+\ln x}{x^3}\right)$$
$$= 1 - 0 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$= 1 + 0(1-0+0) = 1$$

إذن : (2) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1}$

و لدينا كذلك : $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= -1 + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= -1 + 0 = -1$$

إذن : (3) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -1}$

من النهايات (**1**) و (**2**) و (**3**) نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 3

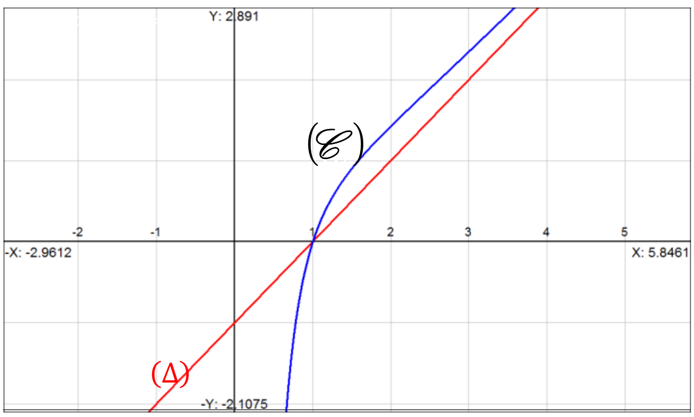
معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$

تكتب على الشكل : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

لدينا : $f(1) = 0$ و $f'(1) = 3$

إذن : $(T) : y = 3(x-1)$

II 4



II 5 أ

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_{v}\,dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv\,dx$$
$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$= \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \boxed{1 - \frac{2}{e}}$$

II 5 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

نقيس المساحة $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي :

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)-(x+1)|\,dx = \int_1^e \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right| dx$$

و لدينا : $x \in [1,e]$ إذن : $\boxed{x > 1}$ (1) و منه : $\boxed{\ln x > 0}$ (2)

نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد : $x + \ln x > 1$

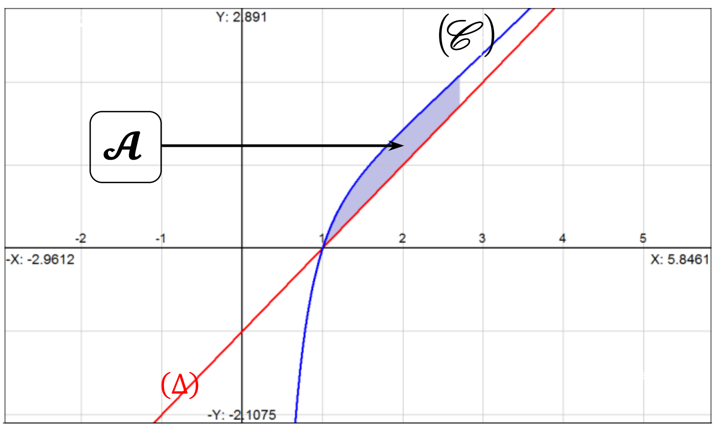
يعني : $\forall\, x \in [1,e]\ ;\ x - 1 + \ln x > 0$

و منه : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \dfrac{x-1+\ln x}{x^2} > 0$

أي : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \left|\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}\right| = \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة $\mathcal{A}$ نجد :

$$\mathcal{A} = \int_1^e \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right| dx = \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) dx$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x}\,dx - \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$
$$= [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e + \left(1 - \frac{2}{e}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{-1}{e} + 1\right) + \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \left(1 - \frac{2}{e}\right)\ unité^2$$
$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right)(1\ cm)^2 = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\ cm^2$$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma