

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبيكالوريا الدورة الاستدراكية 2008

المادة :	الرياضيات
الشعب :	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها
المعامل :	7
مدة الإنجاز :	3 س

تمرين 1:

1. حل المعادلة $z^2 - 8z + 17 = 0$ في $\mathbb{C}$:
مميز المعادلة Δ هو :

$$\begin{aligned}\Delta &= -8^2 - 4 \times 17 \\ &= 64 - 68 \\ &= -4 = (2i)^2\end{aligned}$$

إذن حلا المعادلة $z^2 - 8z + 17 = 0$ هما :

$$z_1 = \frac{-(-8) + 2i}{2} = 4 + i \quad \text{و} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 4 - i$$

2. نبين أن $z' = -iz - 1 + 3i$:

نضع الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه w وزاويته $\frac{3\pi}{2}$:

$$z' - w = e^{i \frac{3\pi}{2}} (z - w)$$

$$e^{i \frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

إذن المتساوية السابقة تصبح :

$$z' - (1 + 2i) = -i(z - (1 + 2i))$$

$$z' = -iz + i(1 + 2i) + (1 + 2i)$$

$$= -iz + i - 2 + 1 + 2i$$

$$= -iz - 1 + 3i \quad \text{ومنه}$$

$$z' = -iz - 1 + 3i \quad \text{أي أن :}$$

ب- التحقق من أن : $c = -i$

لدينا صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة C

$$z'_A = z_C \quad \text{إذن :}$$

ومنه فإن : $z_C = -iz_A - 1 + 3i$

يعني أن : $= -ia - 1 + 3i$

يعني أن : $= -i(4+i) - 1 + 3i$

يعني أن : $= -4i + 1 - 1 + 3i = -i$

أي أن : $z_C = -i$

ج- نبين أن $b - c = 2(a - c)$ ، واستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية :

وبما أن : $(1) \quad b - c = 8 + 3i + i = 8 + 4i$

و : $(2) \quad 2(a - c) = 2(4 + i + i) = 8 + 4i$

من (1) و (2) نجد $b - c = 2(a - c)$

أي أن : $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CA}$ وبالتالي فإن النقط A و B و C مستقيمية.

التمرين 2:

1. مركز (S) وشعاعها :

تكافئ معادلة الفلكة (S) :

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 + 2z + 5 = 0$$

يعني أن : $x - 2^2 - 4 + y - 3^2 - 9 + z + 1^2 - 1 + 5 = 0$

يعني أن : $x - 2^2 + y - 3^2 + z + 1^2 = 9$

وبالتالي فإن مركز (S) هو النقطة $I(2, 3, -1)$ وشعاعها هو : $R = \sqrt{9} = 3$

2. أ- نبين أن مسافة I عن (P) تساوي $\sqrt{6}$:

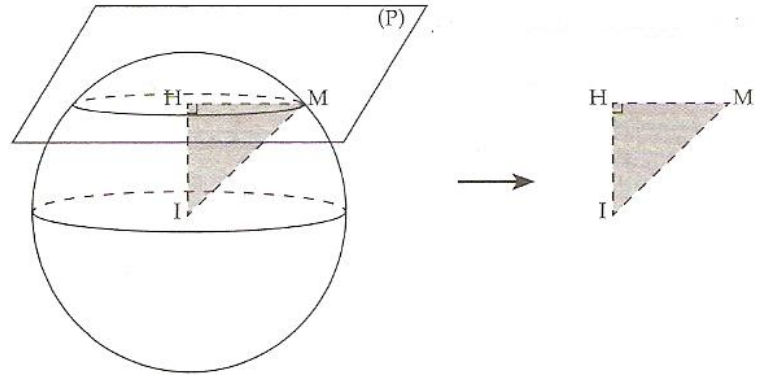
$$\begin{aligned} d(I, (p)) &= \frac{|x_1 + 2y_1 + z_1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 - 1^2}} \\ &= \frac{|2 + 2 \times 3 - 1 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

ومنه فإن : مسافة I عن (P) تساوي $\sqrt{6}$

ب- الإستنتاج :

بما أن : $\sqrt{6} < 3$ أي أن $d(I, (p)) < R$ فإن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة Γ وشعاعها r بحيث :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 - d^2} \\ &= \sqrt{9 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$



$r = \sqrt{R^2 - d^2}$: إذن $d^2 + r^2 = R^2$: r شعاع الدائرة وحسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة لدينا :

3.أ- التمثيل البارامترى ل (D) :

بما أن المتجهة $\vec{n} = (1, 2, 1)$ منتظمة على المستوى (P) فإنها (أي $\vec{n}$) متجهة موجهة للمستقيم (D) وبالتالي فإن تمثيل بارامترى ل (D) يكتب كالتالي :

$$(t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x = x_1 + t \\ y = y_1 + 2t \\ z = z_1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- نبين أن مركز الدائرة Γ هي النقطة $H(1, 1, -2)$:

تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) هي مركز الدائرة Γ .

لتحديد إحداثياتها نعوض x و y و z في معادلة (p) فنجد : $(2+t) + 2(3+2t) + (-1+t) - 1 = 0$

يعني أن : $t + 4t + t + 2 + 6 - 1 - 1 = 0$

وبالتالي فإن : $6t = -6$

ومنه فإن : $t = -1$

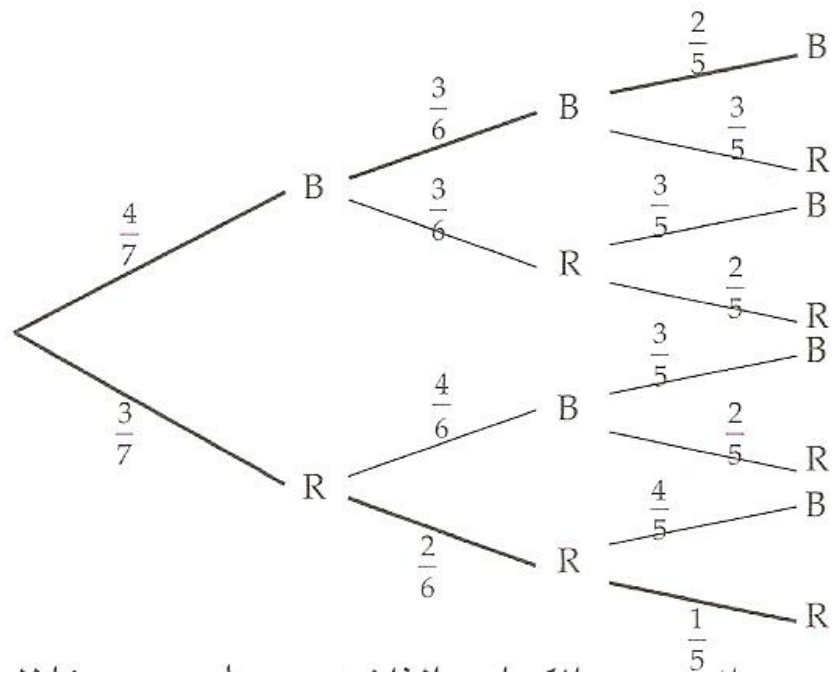
إذن إحداثيات H هي :

$$\begin{cases} x = 2 - 1 \\ y = 3 - 2 \\ z = -1 - 1 \end{cases}$$

ومنه فإن : $H(1, 1, -2)$

تمرين 3:

يمكن استعمال شجرة الاختيارات كالتالي :



1. احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء :
يتحقق الحدث " الكرات الثلاث بيضاء " من خلال B-B-B- واحتماله هو جداء احتمالات فروع

$$P(BBB) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5}$$

$$P(BBB) = \frac{24}{210}$$

$$P(BBB) = \frac{8}{70}$$

1. نبين أن احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$:

الكرات الثلاث من نفس اللون يعني انها كلها بيضاء أو حمراء .
وبالتالي فإن احتمال هذا الحدث هو :

$$P(BBB) + P(RRR) = \frac{4 \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5} + \frac{3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{24 + 6}{7 \times 6 \times 5} = \frac{30}{7 \times 30} = \frac{1}{7}$$

أي أن احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$

3. احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل :
طريقة أولى :

الحدث المضاد للحدث كرة واحدة على الأقل بيضاء هو جميع الكرات حمراء. احتمال هذا الحدث هو :

$$1 - P(RRR) = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

طريقة ثانية : كون الإمكانات Ω حيث : $Card \Omega = 7 \times 6 \times 5$

عدد الإمكانات لتكون الكرة المسحوبة أولا بيضاء هو 4.

عدد الإمكانات لتكون الكرة المسحوبة ثانيا بيضاء هو 3.

عدد الإمكانيات لتكون الكرة المسحوبة في المرة الثالثة بيضاء هو 2.

وبالتالي فإن احتمال الحدث BBB هو : $P(BBB) = \frac{4 \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5}$ وبنفس الطريقة ننجز بقية الأسئلة .

تمرين 4 :

1. نبين أن $u_{n+1} > 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$:

نستعمل البرهان بالترجع .

بما أن $u_0 = 2$

فإن $u_0 > 1$

نفترض أن $u_n > 1$ ولنبين أن $u_{n+1} > 1$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1 = \frac{5u_n - 2u_n - 3}{2u_n + 3} = \frac{3u_n - 1}{2u_n + 3}$$

حسب افتراض التراجع لدينا $u_n > 1$

إذن : $3(u_n - 1) > 0$

وبما أن $2u_n + 3 > 0$

فإن : $\frac{3u_n - 1}{2u_n + 3} > 0$

وبالتالي فإن : $u_{n+1} > 1$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$

2. أ- نبين أن v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ، وكتابة v_n بدلالة n .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2u_n + 3}{5u_n} \\ = \frac{5u_n - 2u_n - 3}{5u_n}$$

$$= \frac{3u_n - 3}{5u_n} = \frac{3}{5} \left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right) = \frac{3}{5} v_n$$

وبالتالي فإن $v_{n+1} = \frac{3}{5} v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ومنه :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{1}{2} \quad \text{نعلم أن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} \right)^n \quad \text{إذن :}$$

ب- نبين أن $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$:

$$v_n = 1 - \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$$

يعني أن : $\frac{1}{u_n} = 1 - v_n$

أي أن : $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

ومنه فإن : $u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

نعلم أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{3}{5} < 1$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{2} = 1$

مسألة

1.1 نحسب $g'(x)$ ، ثم نبين أن g تزايدية على $0, +\infty$ و تناقصية على $-\infty, 0$:

لدينا : $g'(x) = e^{2x} - 2x - 2 = 2e^{2x} - 2$

$= 2e^{2x} - 1$

وبما أن الدالة الأسية تزايدية على $\mathbb{R}$:

فإن : $x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow e^{2x} \geq e^0$

$\Rightarrow e^{2x} \geq 1$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0$

وبالتالي فإن g تزايدية على $0, +\infty$

وبنفس الطريقة : $x \leq 0 \Rightarrow e^{2x} \leq e^0$

$\Rightarrow g'(x) \leq 0$

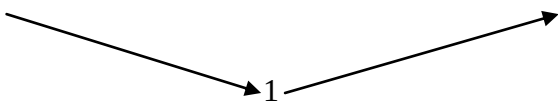
وبالتالي فإن g تناقصية على $-\infty, 0$

2. استنتاج :

نستنتج من س 1. جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

كما أن $g(0)$ قيمة دنوية ل g على $\mathbb{R}$.

إذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

وبالتالي فإن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 1$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$

II - 1. أ- نبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = 0 + \infty = +\infty$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{2x} - 2x) = +\infty$

(لأن $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ بوضع $X = e^{2x} - 2x$ لكل x من $\mathbb{R}^*$) :

ب- التحقق من أن $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2 \right) \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln e^{2x} - 2x}{x} = \frac{e^{2x} - 2x}{x} \times \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x} \\ &= \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2 \right) \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x} \\ &= \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2 \right) \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x} \end{aligned}$$

ج- نبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

(نضع : $t = e^{2x} - 2x$)

$t \rightarrow +\infty$ عندما x يؤول إلى $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \times 0 = 0$$

د- نبين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعاً شلجيميا :

النتيجة $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ تعني أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأفاصيل.

2. أ-

حسب I 2. لدينا : $\forall x \in 0, +\infty \quad g(x) > 0$

ومنه فإن : $e^{2x} - 2x > 0$

$$\frac{e^{2x} - 2x}{e^{2x}} > 0 \quad \text{أي أن :}$$

$$\text{لأن } e^{2x} > 0 \text{ ومنه : } 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$$

$$f(x) = \ln \left[e^{2x} \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) \right] \quad \text{ولدينا :}$$

باستعمال النتائج التالية:

$$\ln a \times b = \ln a + \ln(b)$$

لكل a و b من $0, +\infty$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \ln e^t = t \quad \text{و}$$

نجد :

$$= \ln e^{2x} + \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) f(x)$$

$$= 2x + \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) f(x)$$

ب- استنتاج :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

ج- نبين أن المستقيم الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$:

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) - 2x = \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = 0 \quad \text{فإن :}$$

وبالتالي فإن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (D) معادلته $y = 2x$

د- نبين أن $f(x) - 2x \leq 0$ لكل x من $0, +\infty$:

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{2x}{e^{2x}} \geq 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$\forall x \geq 0 \quad 1 - \frac{2x}{e^{2x}} \leq 1 \quad \text{أي أن : } \frac{-2x}{e^{2x}} \leq 0$$

$$\text{وبالتالي فإن : } \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) \leq 0 \quad \left(\text{لأن } 0 < X \leq 1 \Rightarrow \ln X \leq 0 \right)$$

إذن : $f(x) - 2x \leq 0 \quad \forall x \in 0, +\infty$ وهذا يعني أن (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $0, +\infty$

2. أ- نبين أن $f'(x) = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$:

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \ln g(x)$

إذن : $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$

ب- دراسة إشارة $f''(x)$ و جدول تغيرات f :

درسنا سابقا إشارة $2(e^{2x} - 1)$ في 1. I

ونعلم أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$

إذن إشارة $f''(x)$ هي نفسها إشارة $g'(x)$

جدول تغيرات f :

x	$+\infty$	0	$-\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4. إنشاء (D) و (C) في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$:

