.01

.01 أحسب النهاية التالية :

أ- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}=1$ لأن : $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ مع $u=\sin x$ حيث $x\to 0$ فإن $u\to 0$)

ب – لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\cos x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cos x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\times\frac{3}{1}=\frac{3}{2}$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cos x\sin x}=\dfrac{3}{2}$

.02 أحسب النهاية التالية بدون استعمال المرافق : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$. استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}$.

- نحسب : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$. (الطريقة 1)

لدينا : $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\dfrac{\sqrt[12]{x}^4-1}{\sqrt[12]{x}^3-1}$ و منه نضع : $t=\sqrt[12]{x}$ و بالتالي : $x\to 1$ فإن : $t\to 1$

ومنه :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[12]{x}^4-1}{\sqrt[12]{x}^3-1}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}(t^3+t^2+t+1)}{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^3+t^2+t+1}{t^2+t+1}$$
$$=\frac{4}{3}$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\dfrac{4}{3}$

- نحسب : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$. (الطريقة 2)

لدينا :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\times\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

نحسب :

- $\left[f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\ ;\ f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right]$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\dfrac{1}{3}$.
- $\left[g(x)=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}\ ;\ g'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right]$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=f'(1)=\dfrac{1}{4}$ إذن: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1}=4$
- ومنه : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\times\dfrac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\dfrac{1}{3}\times4=\dfrac{4}{3}$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\dfrac{4}{3}$

- استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+1}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}\\&=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)^2\\&=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}\end{aligned}$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}=\dfrac{16}{9}$

.03 أحسب النهاية التالية بدون استعمال المرافق : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x}}-1}{\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1}$.

- نحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x}}-1}{\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1}$. (الطريقة 1)

لدينا : $\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x}}-1}{\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1}=\dfrac{\sqrt[12]{\dfrac{x+1}{x}}^{3}-1}{\sqrt[12]{\dfrac{x+1}{x}}^{4}-1}$ و منه نضع : $t=\sqrt[12]{\dfrac{x+1}{x}}$ و بالتالي : $x\to+\infty$ فإن : $t\to1$

ومنه :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}}-1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}-1}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{\frac{x+1}{x}}^{3}-1}{\sqrt[12]{\frac{x+1}{x}}^{4}-1}\\&=\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{t^4-1}\\&=\lim_{t\to1}\frac{\cancel{(t-1)}\left(t^2+t+1\right)}{\cancel{(t-1)}\left(t^3+t^2+t+1\right)}\\&=\lim_{t\to1}\frac{t^2+t+1}{t^3+t^2+t+1}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

خلاصة : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x}}-1}{\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1}=\dfrac{3}{4}}$

ملحوظة : يمكنك استعمال الطريقة 2

.02

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

.01 حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

لدينا :

$$\begin{aligned} x\in D_f &\Leftrightarrow x^2+2x+2>0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1+1>0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+1>0 \end{aligned}$$
(و هذا دائما صحيح)

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}$.

02. أحسب نهايتي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجتين المحصل عليهما .

- نحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=0$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+2}=+\infty$) .

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ التأويل الهندسي : أن المنحى الممثل للدالة f يقبل مقارب أفقي هو المستقيم الذي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$.

- نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=0$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+2}=+\infty$) .

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ التأويل الهندسي : أن المنحى الممثل للدالة f يقبل مقارب أفقي هو المستقيم الذي معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$.

03. أدرس اتصال الدالة f على D_f .

لدينا الدالة : $x\mapsto x^2+2x+2$ متصلة و موجبة قطعا على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة $x\mapsto\sqrt{x^2+2x+2}$ متصلة و لا تنعدم على $\mathbb{R}$ و منه مقلوبها متصلة على $\mathbb{R}$.

خلاصة : الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ متصلة على $\mathbb{R}$.

04. أحسب f' على D_f ثم ضع جدول لتغيرات الدالة f .

- نحسب f' على D_f .

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right]' \\ &= -\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'\times\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2} \\ &= -\frac{(x^2+2x+2)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} \times \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$= -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \times \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

و منه : $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \times \frac{1}{(x+1)^2+1}$

- نضع جدول لتغيرات الدالة f .

لدينا إشارة f' هي إشارة $-x-1$. ومنه جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

05. لنعتبر g قصور الدالة f على المجال $I=[-1,+\infty[$.

نبين أن : g تقابل من $[-1,+\infty[$ إلى J يتم تحدده .

حسب ما سبق الدالة f متصلة و تناقصية قطعا على المجال $I=[-1,+\infty[$ إذن قصورها g على المجال $I=[-1,+\infty[$ متصلة و تناقصية قطعا على المجال $I=[-1,+\infty[$.

ومنه : الدالة g تقابل من $I=[-1,+\infty[$ إلى $J=f([-1,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty} f(x);f(-1)\right]=]0;1]$.

خلاصة : g تقابل من $I=[-1,+\infty[$ إلى $J=]0;1]$.

06. نحدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة g

تعتبر : $x\in I=[-1,+\infty[$ و $y\in J=]0;1]$ مع $f(x)=y$ و $f^{-1}(y)=x$.

ومنه :

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2x+2}=y^2 \quad ; \quad (y>0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2+1}=y^2$$

$$\Leftrightarrow 1=y^2\left((x+1)^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow y^2(x+1)^2=y^2-1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{y^2-1}{y^2} \quad \left(\frac{y^2-1}{y^2} > 0; y \geq 1\right)$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$$ أو $$x+1 = -\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$$

$x+1 = -\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$ (غير مقبول $\left(x \in [-1,+\infty[\Rightarrow x+1 \in [0;+\infty[\right)$

$x+1 = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$ (مقبول $\left(x \in [-1,+\infty[\Rightarrow x+1 \in [0;+\infty[\right)$

ومنه : $x = -1+\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$ و بالتالي : $f^{-1}(y) = x = -1+\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$

خلاصة : الدالة العكسية هي معرفة كما يلي :

$$f^{-1} : J =]0;1] \to I = [-1,+\infty[$$
$$x \mapsto f^{-1}(x) = -1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$$

03.

تذكير :

✓ $a < x < b$ يسمى تأطيرا للعدد x سعته (أو طوله) $b-a$.

✓ العدد $\frac{a+b}{2}$ (منتصف أو مركز المجال) هو قيمة مقربة ل x إلى الدقة $\frac{b-a}{2}$. (أي السعة مقسومة على 2)

طريقة التفرع الثنائي LA Dichotomie :

- f دالة عددية متصلة على $[a;b]$ حيث $f(a)f(b)<0$ مع α عدد وحيد من $]a;b[$ يحقق $f(\alpha)=0$.(مع العلم أن $\frac{a+b}{2}$ مركز $[a;b]$)
- لتحديد تأطيرا أدق ل α نحسب : $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- نتبع ما يلي :
  - ❖ إذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ فإن $\alpha = \frac{a+b}{2}$.
  - ❖ إذا كان $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ فإن $\alpha \in \left]a;\frac{a+b}{2}\right[$. و هو تأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ و عند إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ نحصل على تأطير أدق للعدد α .
  - ❖ ذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\times f(b)<0$ فإن $\alpha \in \left]\frac{a+b}{2};b\right[$. و هو تأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ و عند إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ نحصل على تأطير أدق للعدد α .

وهي تسمى : طريقة التفرع الثنائي La Dichotomie :

تمرين تطبيقي :

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $f(x)=x^3+x-1$.

01. نبين أن المعادلة : $f(x)=0$: $x\in[a;b]$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]0;1[$.

لدينا :

- الدالة $f(x)=x^3+x-1$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذن هي متصلة على $[0;1]$ و لدينا : $f(0)\times f(1)=(-1)\times 1<0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل α من $]0;1[$ حيث : $f(\alpha)=0$ أي $\alpha^3+\alpha-1=0$
- $f'(x)=3x^2+1>0$ إذن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن هي تزايدية قطعا على $[0;1]$ ومنه : يوجد عدد وحيد α حيث : $f(\alpha)=0$ (حسب مبرهنة التقابل theorème des bijections)
- ومنه : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α من $]0;1[$.

خلاصة : المعادلة : $f(x)=0$: $x\in[a;b]$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]0;1[$.

02. أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم استنتج تأطيرا ل α سعته $\frac{1}{2}$.

- نحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$: لدينا : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{8}$. إذن : $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$
- نستنتج تأطيرا ل α سعته $\frac{1}{2}$. لدينا : $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1)=\left(-\frac{3}{8}\right)\times 1<0$ ومنه $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

خلاصة : $\frac{1}{2}<\alpha<1$ و هو تأطير ل α سعته : $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

03. حدد قيمة مقربة ل α إلى الدقة $\frac{1}{8}$.

بما أن : $\frac{1}{2}<\alpha<1$ نبحث عن تأطير أدق ل α و ذلك باستعمال طريقة التفرع الثنائي مع : $a=\frac{1}{2}<\alpha<1=b$

- نبحث عن الإشارة السالبة من بين : $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\times f(b)$ و $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

مع $\frac{11}{64}=f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ و $f(a)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$ و $f(b)=f(1)=1$.

لدينا :

❖ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\times f(b)=\frac{11}{64}\times 1=\frac{11}{64}\not<0$ (إذن $\alpha\notin\left]\frac{a+b}{2};b\right[$ لا نأخذ هذا التأطير) .

❖ $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)=-\frac{3}{8}\times\frac{11}{64}<0$ (إذن $\alpha\in\left]a;\frac{a+b}{2}\right[=\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$ نأخذ هذا التأطير).

- هذا التأطير سعته : $\frac{a+b}{2}-a=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
- قيمة مقربة ل α : هو العدد $\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}=\frac{5}{8}$ إلى الدقة $\frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{8}$.

خلاصة : قيمة مقربة ل α : هو العدد $\frac{5}{8}$ إلى الدقة $\frac{1}{8}$.