

Niveaux: SM PC

Matière: Physique

PROF: Zakaryae Chriki

Résumé N:17

## Oscillateurs Mécaniques : Pendule Pesant



### I. Pendule Pesant

On appelle pendule pesant tout solide mobile autour d'un axe ( $\Delta$ ) (en principe horizontal) ne passant pas par son centre de gravité et placé dans un champ de pesanteur

#### 1. Equation différentielle :

Système étudié : (S)

Bilan des forces extérieures exercées sur (S) :

\*  $\vec{P}$  le poids du système (S)

\*  $\vec{R}$  force exercée par l'axe ( $\Delta$ ) sur (S) ;

Application de la relation fondamentale de la dynamique :  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$  car la droite d'action de  $\vec{R}$  coupe l'axe ( $\Delta$ )

On pose  $d = OG$ , où  $G$  est le centre d'inertie du système (S). Dans ce cas nous avons :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgd \sin \theta$$

$$-mgd \sin \theta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \sin \theta = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant, elle est non linéaire.

#### Conclusion :

Le mouvement du pendule pesant est un mouvement de rotation oscillatoire, périodique mais non sinusoïdale

#### 2. cas des petites oscillations :

Pour des faibles oscillations ( $\theta \leq 0,26 \text{ rad}$ ) on peut écrire avec une bonne approximation  $\sin \theta \simeq \theta$

, d'où l'équation différentielle dans ce cas est :  $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \theta = 0$

C'est une équation différentielle du mouvement du pendule pesant pour des faibles oscillations.

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_m \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} t + \varphi_0 \right)$$

$\theta_m$  est l'amplitude des oscillations (rad),  $\varphi_0$  est la phase à l'origine des dates (rad) et  $T_0$  la période propre du pendule pesant.

#### 3. Expression de la période propre $T_0$ :

La période propre d'un pendule pesant libre et non amorti qui effectue des oscillations de faible amplitude, a pour expression :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

$T_0$  la période propre du pendule (s)

$J_\Delta$  Moment d'inertie du système par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) en ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

$d$  distance séparant le centre d'inertie  $G$  du pendule à l'axe  $\Delta$  en (m).

$g$  intensité de pesanteur en ( $\text{m/s}^2$ ) La fréquence propre du pendule pesant :  $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$   $f_0$  en Hz

### II. Etude Energétique

#### 1. Energie cinétique :

L'énergie cinétique d'un pendule pesant effectuant un mouvement oscillatoire est définie par la relation :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

Avec  $J_\Delta$  est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe  $\Delta$

exprimé en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$  ;  $\dot{\theta}$  est la vitesse angulaire du pendule en rad/s et  $E_c$  est

l'énergie cinétique en joule (J).

$$\theta = \theta_m \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi \right) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = -\theta_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi \right) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_\Delta \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_\Delta \left( -\theta_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi \right) \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot C (\theta_m^2 - \theta^2)$$

• Si  $\theta = \theta_m$  ou  $\theta = -\theta_m$  alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement

• Si  $\theta = 0$  alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

## 2. Energie potentielle de pesanteur:

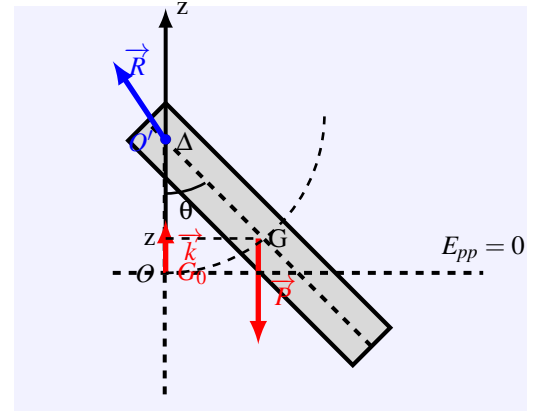
L'énergie potentielle de pesanteur d'un pendule pesant est donnée par la relation suivante :  $E_{pp} = mgz + Cte$

Avec  $m$  la masse du système en (kg),  $g$  intensité de pesanteur en ( $m/s^2$ ),  
 $z$  la cote du centre d'inertie  $G$  du système sur l'axe  $O$ ,  $\vec{k}$  d'un repère  
 orthonormé  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orienté vers le haut.  
 $Cte$  une constante qui dépend de l'état de référence choisi où l'énergie  
 potentielle est nulle ( $E_{pp} = 0$  et  $z = z_{ref}$ )

L'énergie potentielle de pesanteur en fonction de  $\theta$  est :

$$E_{pp} = mgd(1 - \cos\theta) \text{ avec } d = OG.$$

$$E_{pp} = mgd(1 - \cos\theta)$$



## 3. Expression de la variation de l'énergie potentielle de pesanteur:

$\Delta E_p$  : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot (Z_2 - Z_1) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{P})$$

## 4. Energie mécanique :

L'expression de l'énergie mécanique d'un pendule pesant dans un référentielle terrestre est :  $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgz + Cte$

## 5. Diagramms d'énergie d'un pendule pesant :

Diagramme des énergies en fonction de  $z$  : (en absence de frottement)

\*  $E_{pp} = mgz$  avec  $0 \leq z \leq z_m$

\* l'énergie mécanique : pour  $0 \leq z \leq z_m$  on a  $E_m = E_c + mgz$  lorsque

$z = z_m$  on a  $E_m = mgz_m$

lorsqu'il passe par la position d'équilibre on a  $z = 0$  et  $E_m = E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_m^2$

\*  $E_c = E_m - E_{pp}$

$E_m$  est constante et il y a une échange d'énergie au cours des oscillations

, soit  $\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$

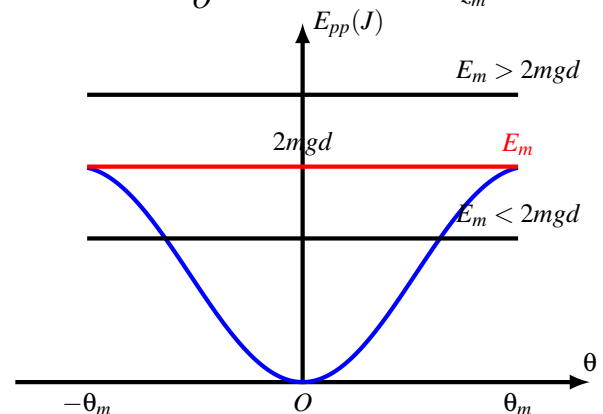
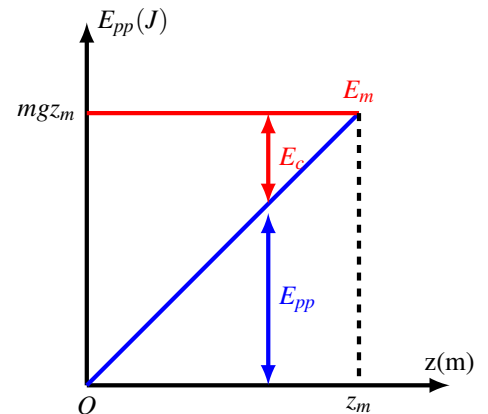
Diagramme des énergies en fonction de  $\theta$

\* L'expression de l'énergie potentielle en fonction de  $\theta$  est :

$E_{pp} = mgd(1 - \cos\theta)$  avec  $-\theta_m \leq \theta \leq \theta_m$ .

Cas 1 :  $E_m > 2mgd \Rightarrow E_c = E_m - E_{pp} > 0$  le pendule ne s'arrête pas et il tourne autour de l'axe ( $\Delta$ ).

Cas 2 :  $E_m < 2mgd \Rightarrow E_c = E_m - E_{pp} < 0$  et puisque  $E_c$  ne peut pas être négative alors dans ce cas  $E_c \geq 0$  alors pour  $E_c = 0$  l'élongation  $\theta = \theta_m$  ou  $\theta = -\theta_m$  et le pendule pesant a un mouvement oscillatoire libre et amorti



## III. Pendule simple

Le **pendule simple** est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, et oscillant sous l'effet de la pesanteur.

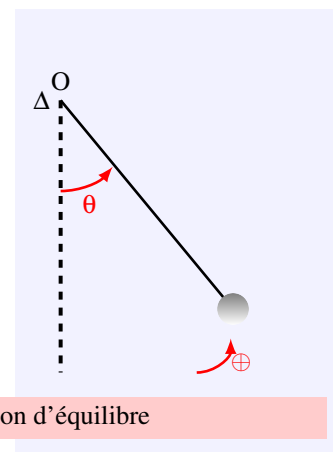
$$d = \ell \text{ et } J_{\Delta} = m \cdot \ell^2$$

- Expression de la période  $T_0$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{m \cdot g \cdot d}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot \ell^2}{m \cdot g \cdot \ell}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

- La longueur du pendule simple synchrone avec le pendule pesant (ont même période propre  $T_0$ )

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{m \cdot g \cdot d}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \text{ donc } \frac{J_{\Delta}}{m \cdot g \cdot d} = \frac{\ell}{g} \text{ d'où } \ell = \frac{J_{\Delta}}{m \cdot d}$$



Position d'équilibre

## ❖ Amortissement des oscillations mecaniques

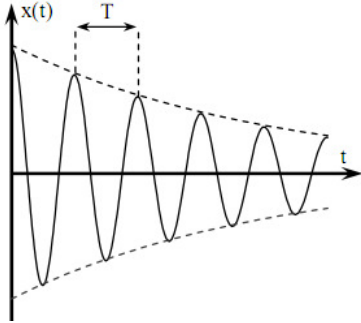
L'amortissement d'un système est une atténuation de l'amplitude de son mouvement par dissipation (perte) de l'énergie mécanique

$$\Delta E_m = W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) < 0$$

On en distingue deux types d'amortissement

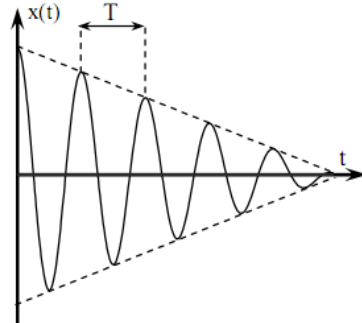
### Amortissement fluide

Un solide qui oscille dans un fluide (liquide ou gaz) est soumis à un amortissement



### Amortissement solide

Le frottement entre deux solides correspond à une dissipation sous la forme de chaleur.



#### • Cas de faible amortissement

- L'amplitude diminue jusqu'à arrêt du mobile
- Mouvement de l'oscillateur est pseudo periodique

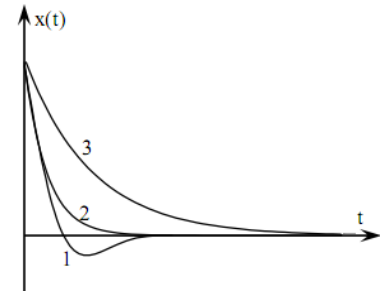
$T$  : pseudo période

$T = T_0$  : la pseudo période et la période propre sont égales (pour les fortament solide)

Différents régimes de retour à l'équilibre d'un système en fonction du frottement

On observe les régimes :

- Pseudopériodique (1)
- Critique (2)
- Apériodique (3)



## ❖ Oscillations forcées et résonance

Le phénomène de résonance mécanique se produit lorsque la période  $T_e$  des oscillations forcées est voisine de la période propre  $T_e$  du résonateur

### **Influence de l'amortissement sue la résonance :**

Dans le cas d'un amortissement faible du résonateur , l'amplitude des oscillations forcées à la résonance prend une valeur grande ; on dit que la résonance est aigue . Dans le cas d'un amortissement du résonateur fort , l'amplitude des oscillations prend une valeur faible , on dit que la résonance est floue ou obtûe .