

Pendule Elastique

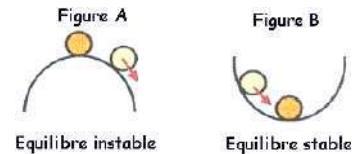
Résumé:15

Niveaux:SM PC SVT

Oscillateur mécanique : Tout mobile qui effectue un mouvement de va et viens autour de sa position d'équilibre stable

Nous déplaçons légèrement la bille de sa position d'équilibre,

- **La figure A :** elle se met à rouler et ne reviendra pas à sa position de départ. L'équilibre est instable.
- **La figure B :** elle revient dans sa position de départ. L'équilibre est dit stable.



I. Pendule Elastique

Un pendule élastique, ou **système solide-ressort**, est constitué d'un solide, de masse m , fixé à un ressort, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K , dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe.

1. La Tension du ressort

$T=K.\Delta\ell$ Tension du ressort (N)	$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ Allongement du ressort (m)	ℓ_0 Longueur initiale ℓ_0 (m)	K Raideur du ressort (N/m)
--	--	--	---------------------------------

Expression de $\Delta\ell$

Ressort horizontal	Ressort vertical ou incliné On admet que le mouvement du solide est dans le sens positif et on conclut			
Ressort horizontal initialement non allongé et fixé directement au mobile ou au moyen d'un fil inextensible et de masse négligeable $\Delta\ell=x$	Si le ressort s'allonge alors $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$	Si le ressort se comprime alors $\Delta\ell = \Delta\ell_0 - x$	Si le ressort s'allonge alors $\Delta\ell = \Delta\ell_0 - x$	Si le ressort se comprime alors $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$

2. Equation différentielle :

Un solide, de masse m sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K ,

Système : Solide (C)

Bilan des forces :

- $\vec{T}$: Tension du ressort
- $\vec{R}$: Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$: Poids du corps (C)

En appliquant la 2^{ème} loi de Newton : $\sum \vec{F} = m.\vec{a}_G$

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{T} \begin{pmatrix} T_x = -T \\ T_y = 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P} \begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P = -m.g \end{pmatrix} \text{ et } \vec{R} \begin{pmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_G \begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$$

Sur l'axe Ox : $T_x + R_x + P_x = m.a_x$

$$-T = m.\ddot{x} \text{ et } -K.\Delta\ell = m.\ddot{x} \text{ et } -K.x = m.\ddot{x} \text{ d'où } -\frac{K}{m}.x = \ddot{x}$$

$$\text{donc } \ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0 : \text{Equation différentielle de mouvement du centre d'inertie G}$$

L'équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ ou bien $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (en rad/s)

3. Equation horaire ou la solution de l'equation différentielle :

$$x = x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

ou bien

$$x = x(t) = X_m \cos(\omega_0.t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

avec

$x(t)$: l'abscise (élongation) du point G et varie entre X_m et $-X_m$
 X_m : Amplitude ou élongation maximale

ω_0 : pulsation (rad/s)

T_0 : la période (s)

$\omega_0.t + \varphi$: Phase à l'instant t

φ : Phase à l'origine des temps $t=0$

Déterminer les constantes X_m , T_0 et φ :

Comment déterminer X_m

1. Phrase	- On écarte le corps de 2cm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale $X_m = 2\text{cm}$ - Le corps oscille entre deux points A et B distante de $AB = 4\text{cm}$ $X_m = 2\text{cm}$ d'où $AB = 2 \cdot X_m = 4\text{cm}$
------------------	--

2. Graphiquement	2.1. Par rapport à l'axe temps $X_m = 1.5\text{cm}$
-------------------------	--

Comment déterminer la période propre T_0

3. Enregistrement	τ : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs $T = 16 \cdot \tau$
--------------------------	--

4. Graphiquement $x=f(t)$	Attention à la lecture et à l'échelle $T_0 = 3.2\text{ms}$
---	---

Comment déterminer la phase à l'origine φ

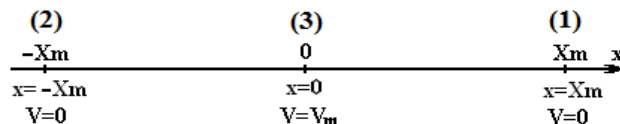
$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$: l'équation horaire $V_x = \dot{x}(t) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$

: l'expression de la composante du vecteur vitesse V_x et $\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$ sont opposées (ont des signes différents)

$x_0 = x(0) = X_m \cdot \cos(\varphi)$ d'où $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m}$ à l'instant $t=0$ $V_{0x} = V(0) = \dot{x}(0) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\varphi)$

V_x à l'instant $t=0$ et $\sin(\varphi)$ sont opposées (ont des signes différents) On en conclut que V_x à l'instant $t=0$ et φ sont opposées aussi

En comparant le sens de mouvement avec le sens positif de l'axe, on détermine le signe de V_x la composante de la vitesse et on en déduit le signe de la phase φ



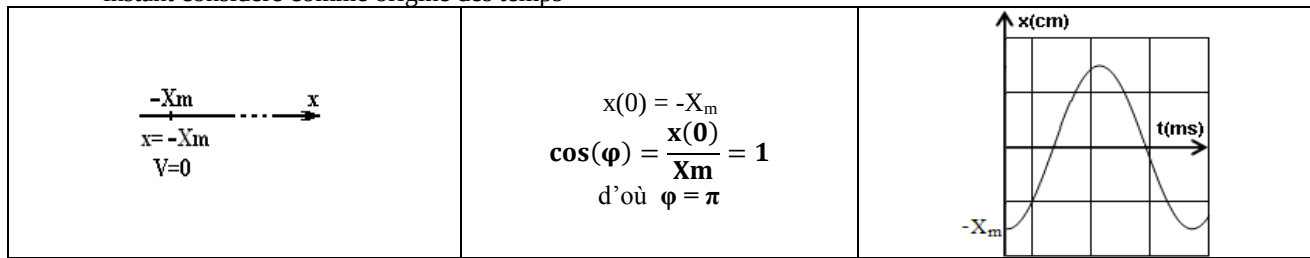
1^{er} cas :

(1) On écarte le corps, dans le sens positif, de X_m de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps

$x = X_m$ $V = 0$	$\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m} = 1$ d'où $\varphi = 0$	
--	---	--

2^{em} cas :

- (2) On écarte le corps, dans le sens négatif, de X_m de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps



4. Expression de la période propre T_0 :

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) : \text{l'équation horaire}$$

On dérive deux fois par rapport au temps t :

$$\dot{x} = -x_m \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \ddot{x} = -x_m \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x \quad \ddot{x} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x = 0$$

On compare cette expression avec l'équation différentielle, on déduit que pour que soit une solution de l'équation différentielle,

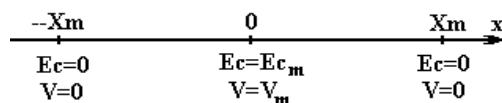
$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \text{il suffit que} \quad \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{K}{m} \quad \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

II. Etude Energétique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

1. Energie cinétique :

$$x = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad v_x = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$



- Si $x = X_m$ ou $x = -X_m$ alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si $x = 0$ alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

2. Energie potentielle :

L'énergie potentielle (de position), définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

❖ Energie potentielle élastique E_p

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $E_{pe}=0$

Si le pendule élastique est horizontal alors $\Delta \ell = x$ alors

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C$$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique $x=0$ et $E_{pe}=0$ d'où $C=0$ alors

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

❖ Energie potentielle de pesanteur E_p

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot Z + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $E_{pp}=0$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique $z=0$ et $E_{pp}=0$ d'où $C=0$ alors

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot Z$$

NB :

Pour un pendule élastique horizontal $E_{pp}=0$

$$\text{Conclusion : } E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

$$\text{On a } x = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ alors } E_p = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

3. Expression de la variation de l'énergie potentielle :

ΔE_{pe} : Variation de l'énergie potentielle élastique

$$\Delta E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_2^2 - \Delta \ell_1^2) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{T})$$

ΔE_{pp} : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur

$$\Delta E_{pp} = m \cdot g \cdot (Z_2 - Z_1) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{P})$$

4. Energie mécanique :

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C \quad \text{Pour les conditions décrites avant on peut écrire} \quad E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

5. Le cas du pendule élastique incliné ou vertical

X : la distance que parcourt le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et

$$Z = -X \cdot \sin(\alpha)$$

NB : si on change l'orientation de l'axe z

- L'expression de l'énergie potentielle varie

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = -m \cdot g \cdot Z + C$$

- La relation entre abscisse varie aussi

$$Z = X \cdot \sin(\alpha)$$

$$1. \quad E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot Z + C$$

$$2. \quad \text{Déterminer l'expression de la constante C}$$

- Déterminer le plan horizontal référentielle de l'énergie potentielle $E_{p_p}=0$

- Déterminer l'abscisse correspondant Z_0

$$Z = Z_0 \text{ et } E_{p_p}(Z_0) = 0$$

D'où

$$E_{p_p}(Z_0) = m \cdot g \cdot Z_0 + C = 0$$

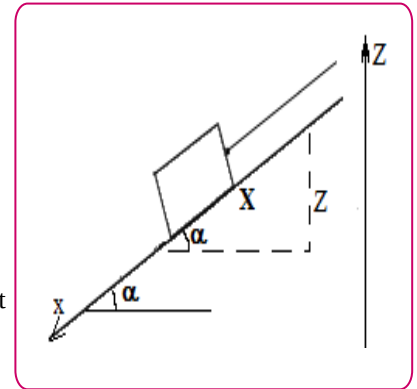
donc

$$C = -m \cdot g \cdot Z_0$$

$$3. \quad \text{On remplace C par son équivalent et on obtient alors}$$

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot Z - m \cdot g \cdot Z_0$$

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot (Z - Z_0)$$



Energie potentielle élastique

$$1. \quad E_{p_e} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

Déterminer l'expression de $\Delta \ell$ en fonction de x soit $\Delta \ell = \Delta \ell_0 + x$

$$2. \quad \text{Déterminer la constante C}$$

- Déterminer le plan référentiel de l'Energie potentielle $E_{p_e}=0$

- Déterminer l'abscisse correspondant x_0

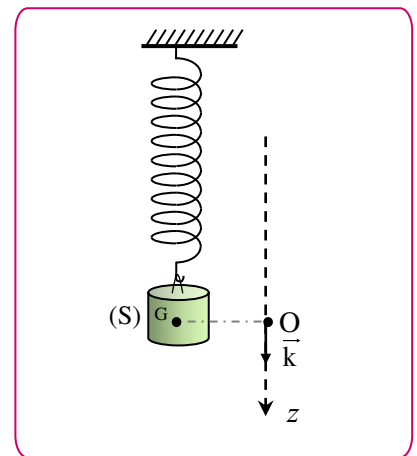
$$x = x_0 \text{ et } E_{p_e}(x_0) = 0$$

$$\text{D'où } E_{p_e}(x_0) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C = 0$$

$$\text{Donc } C = -\frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2$$

$$3. \quad \text{Remplacer dans l'expression de } E_{p_e}$$

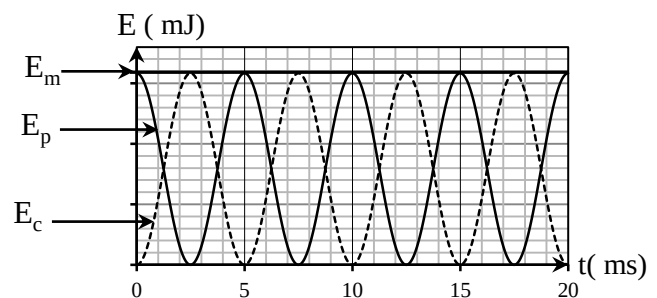
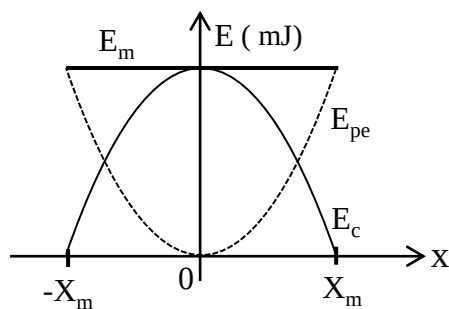
$$E_{p_e} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C$$



6. Les graphes d'énergies :

- Au point $x=X_m$ on a $E_m=E_{p_{\max}}$

- Au passage par la position d'équilibre $x=0$ on a $E_m=E_{c_{\max}}$



$T_0 = 2 \cdot T_e$: La période des oscillations T_0 est le double de la période des énergies T_e

NB :

S'il existe frottement alors l'amplitude des oscillations diminue par dissipation (perte) de l'énergie mécanique au cours du temps

