Zak Ar yae Chri K i

Mouvements plans

Résumé:12 | Niveaux:SM PC SVT

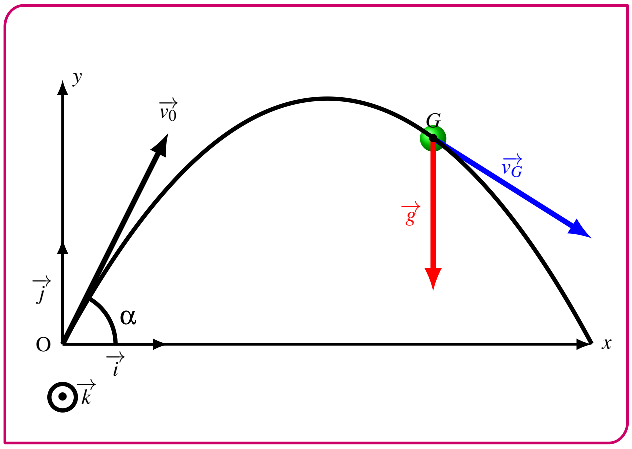
I. Mouvemment d'un porjectile dans le champs de pesanteur uniforme

1. Equations diffenrentielles du mouvement :

Une bille est lancée avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec le plan horizontal. Étudions le mouvement de son centre d'inertie dans le référentiel terrestre . Choisissant un repère $\mathscr{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lié à ce référentiel.

Les conditions initiales :
Dans ce repère et la date t=0 , nous avons :

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{cases}x_0=0\\y_0=0\\z_0=0\end{cases}\qquad \vec{v_0}\begin{cases}\dot{x}_0=v_0cos(\alpha)\\\dot{y}_0=v_0sin(\alpha)\\\dot{z}_0=0\end{cases}$$



À la date t quelconque , G a pour coordonnées (x,y,z) , sa vitesse $\vec{v_G}(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$. On applique la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}}=m.\vec{a_G}$$

On néglige la résistance de l'air , bilan des forces exercées sur la bille au cours de son mouvement est une seule force le poids de la bille :

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}}=\vec{P}=m.\vec{a_G}\qquad m\vec{a_G}=m.\vec{g}\qquad \boxed{\vec{a_G}=\vec{g}}\quad(1)$$

où $\vec{a_G}$ est le vecteur accélération du centre d'inertie G .

C'est le même résultat de l'étude d'un mouvement de chute libre vertical , se généralise de la façon suivante :

> ***Lors de la chute libre d'un mobile , le vecteur accélération $\vec{a_G}$ de son centre d'inertie est égal au vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$.***

On projette la relation vectorielle (1) dans le repère $\mathscr{R}$:

$$\vec{g}\begin{cases}0\\-g\\0\end{cases}\quad \text{et}\quad \vec{a_G}\begin{cases}a_x=\ddot{x}=0\\a_y=\ddot{y}=-g\\a_z=\ddot{z}=0\end{cases}$$

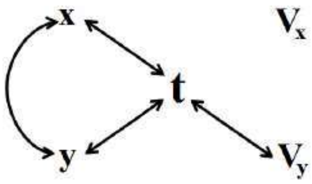
Les trois équations représentent les équations différentielles du mouvement du projectile dans le repère $\mathscr{R}$.

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=0\\\dfrac{d^2y}{dt^2}=-g\\\dfrac{d^2z}{dt^2}=0\end{cases}$$

2. Equations horaires

* **Les coordonnées du vecteur vitesse :** Les coordonnées vecteur vitesse $\vec{v_G}$ sont les primitives des coordonnées du $\vec{a_G}$. compte tenu des conditions initiales , nous obtenons :

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dot{x_0}=v_0cos(\alpha)\\\dfrac{dy}{dt}=\dot{y_0}=-gt+v_0sin(\alpha)\\\dfrac{dz}{dt}=\dot{z}=0\end{cases}$$



$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$$

Les coordonnées vecteur position $\overrightarrow{OG}$ sont les primitives des coordonnées du $\vec{v_G}$. compte tenu des conditions initiales , nous obtenons :

$$\begin{cases}x(t)=v_0cos(\alpha).t+x_0=v_0cos(\alpha)\\y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0sin(\alpha).t+y_0=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0sin(\alpha).t\\z(t)=z_0=0\end{cases}$$

> Nous déduisons de ces équations horaires trois résultats importants :
> ☞ $z=0$, la trajectoire du centre d'inertie est dans le plan vertical (Ox,Oy) contenant $\vec{v_0}$
> ☞ $x(t)=v_0cos(\alpha).t$; le mouvement de la projection de G sue Ox est uniforme
> ☞ $y(t)=-\dfrac{1}{2}g.t^2+v_0sin(\alpha).t$; le mouvement de la projection de G xur l'axe Oy est uniformément accéléré .

3. Equations de la trajectoire :

Établir l'équation de la trajectoire dans le plan (xOy) consiste à exprimer y en fonction de x $y = f(x)$.

Il faut donc éliminer le paramètre temps t des équations horaires x(t) et y(t) :

$t = \dfrac{x}{v_0.cos(\alpha)}$ $\quad y = -\dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{v_0^2 cos^2\alpha} + \dfrac{v_0 sin(\alpha)}{v_0 cos(\alpha)}.x$ $\quad \boxed{y = -\dfrac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}.x^2 + x.tan(\alpha)}$

Cette équation est de la forme $y = A.x^2 + B.x$ est celle d'une parabole .

4. La portée :

On appelle portée de tir la distance entre le point de lancement O et le point d'impact P sur le plan horizontal contenant O .

On la calcule , c'est la valeur de x différent de 0 qui annule y , c'est à dire : $OP = x_P = \dfrac{2v_0^2 sin(\alpha).cos(\alpha)}{g} = \dfrac{v_0^2 sin(2\alpha)}{g}$

La portée est maximale si $\alpha = \frac{\pi}{4}$

5. la flèche :

On appelle la flèche l'altitude maximale atteinte par G (position de F) .
Au point FS le vecteur vitesse est horizontale $\dot{y_F} = 0$, c'est à dire que : $\vec{V}_F \begin{pmatrix} V_{Fx} = V_{0x} \\ V_{Fy} = 0 \end{pmatrix}$ Ou $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_F = 0$

Les coordonnées de le flèche (F)

$\dfrac{dy}{dt} = -g.t_F + v_0 sin(\alpha) = 0 \quad t_F = \dfrac{v_0.sin(\alpha)}{g}$ d'où $y_F = \dfrac{v_0^2 sin^2\alpha}{2.g}$ $\quad x_F = \dfrac{1}{2}.\dfrac{V_0^2.sin(\alpha).cos(\alpha)}{g} = \dfrac{V_0^2.sin(2.\alpha)}{g}$

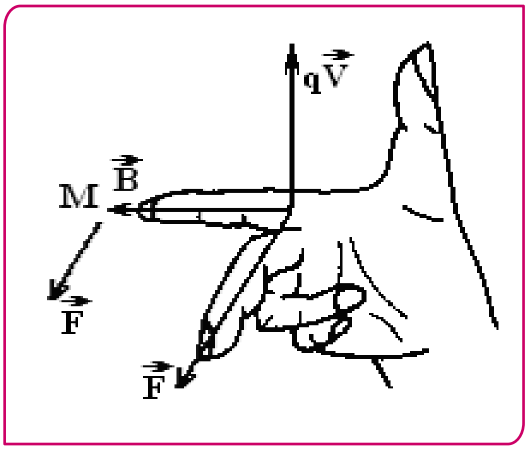
II. Mouvement d'une particule chargée dans un chanps magnétique uniforme (sm+pc)

1. La relation de lorentz :

a. Relation de Lorentz :

Nous admettons que la force $\vec{F}$ exercée sur un porteur de charge q , animé d'une vitesse $\vec{v}$ et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par la relation vectorielle suivante : $\boxed{\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}}$ Cette relation dite de Lorentz , fait intervenir un produit vectoriel . $\vec{F}$ est appelée **force magnétique de Lorentz** .

b. Caractéristiques de la force magnétique de Lorentz .



Le produit vectoriel de $q.\vec{v}$ et $\vec{B}$ permet de déterminer les caractéristiques de $\vec{F}$.

* Point d'application : la particule supposée ponctuelle

* Direction : La perpendiculaire au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$ i.e $\vec{F}$ est à la fois perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$

* Sens : Défini par le trièdre direct $(q.\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$

* Intensité : $F = |q.v.B.sin(\vec{v}, \vec{B})|$

Avec q la charge de la particule en (C) , v la vitesse de la particule (m/s),B l'intensité du champ magnétique (T) et F l'intensité de la force de Lorentz .

NB :

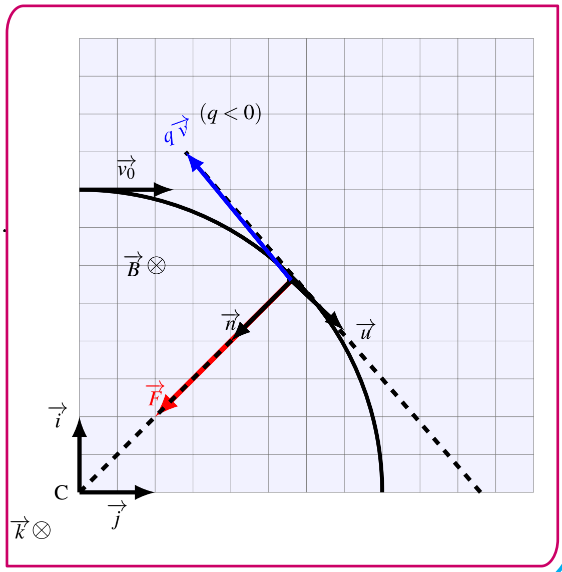
La force magnétique $\vec{F}$ est normale (perpendiculaire) au plan des deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{V}$ donc :

1. $\vec{F}$ est normale au champ magnétique $\vec{B}$
2. $\vec{F}$ est normale au vecteur vitesse $\vec{V}$ donc : $\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v} = 0$ La puissance de la force de Lorentz est nulle et par conséquence

$\mathscr{P} = \dfrac{dE_c}{dt} = 0$, donc $E_c = Cte$

2. Etude du mouvement de la particule :

Caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}_G$:



On applique la deuxième loi de Newton : $q.\vec{v} \wedge \vec{B} = m.\vec{a}$

$\boxed{\vec{a} = \dfrac{q}{m}(\vec{v} \wedge \vec{B})}$ (1) Le vecteur accélération est perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.

Si on multiplie les deux membres de l'équation vectorielle (1) par le vecteur unitaire $\vec{k}$

$\vec{a}.\vec{k} = \dfrac{q}{m}(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{k} = 0$ car $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{k}$.

Donc $\vec{a}.\vec{k} = \vec{0} \Longrightarrow \ddot{z} = 0$ et par intégrations successives et en tenant compte des conditions initiales, on trouve $\dot{z} = 0$ et $z = 0$ **le mouvement de la particule se fait dans le plan (Ox,Oy) orthogonal à $\vec{B}$.Sa trajectoire est donc plane.**

Mouvement circulaire uniforme :

On applique la 2^{eme} loi de Newton sur le repère de Frénet

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_G = \vec{F} \text{ et } \vec{F}\begin{pmatrix} Fu = 0 \\ Fn = F \end{pmatrix}$$

On projette sur les axes

Sur l'axe $\vec{u}$: $F_u = m.a_u = 0$ et $a_u = 0$ d'ou $a_u = \frac{dV}{dt} = 0$ on en deduit que $V = C^{te}$ et le mouvement est donc uniforme

Sur l'axe $\vec{n}$: $F_n = m.a_n = m.|q|.V.B$ donc $a_n = a_G = \frac{|q|}{m}.V.B$

Conclusion : L'accélération de la particule dépend de : • Sa masse et de sa charge • Module du champ magnétique • La vitesse

$$a_n = \frac{|q|}{m}.V.B = \frac{V^2}{r}$$

$$r = \frac{m.V}{|q|.B} = \frac{2.Ec}{|q|.V.B} = C^{te}$$

Le mouvement est donc circulaire

$$V = \frac{|q|}{m}.B.r$$

Conclusion :
La vitesse de la particule dépend de sa masse, de sa charge , de sa position dans le champ magnétique et de module du champ magnétique

Le mouvement est donc circulaire uniforme

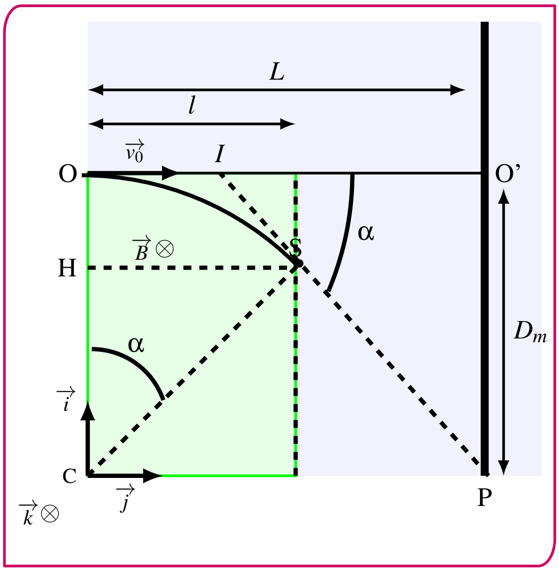
Toute particule chargée dans un champ magnétique uniforme est animée d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r

La vitesse angulaire ω : $V = r.\omega = \frac{2.\pi.r}{T}$

La période : durée nécessaire pour faire un tours complet $T = \frac{2.\pi}{\omega} = \frac{2.\pi.r}{V} = \frac{2.\pi}{V}\frac{m.V}{|q|.B} = \frac{2.\pi.m}{|q|.B}$

3. Déviation magnétique :

Le faisceau d'électrons pénètre en O dans une région de largeur l où règne un champ uniforme $\vec{B}$, est dirigé suivant OO' . Dans le champ magnétique , les particules décrivent un arc de rayon $r = \frac{mv_0}{|q|.B}$ et sortent du champ au point S en décrivant un mouvement rectiligne uniforme selon la tangente en S à la trajectoire circulaire . En arrivant au point P sur l'écran E perpendiculaire à OO' et situé à la distance L du point O . On appelle $D_m = O'P$ la déflexion magnétique .



La déviation angulaire $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CS})}$ est donnée par $sin\alpha = \frac{l}{r}$ ou $tan\alpha = \frac{O'P}{IO'} = \frac{D_m}{L - OI}$.

Dans le dispositif utilisé , α est petit , la distance OI est très inférieure à L . ainsi que $sin\alpha \simeq \alpha$ avec α en rad .

$\frac{l}{r} = \frac{D_m}{L}$. Soit $D_m = \frac{L.l}{r}$ ou encore :

$$\boxed{D_m = \frac{|q|.L.l}{mv_0^2}.B}$$

La mesure de D_m permet de calculer le rapport $\frac{|q|}{mv_0}$.