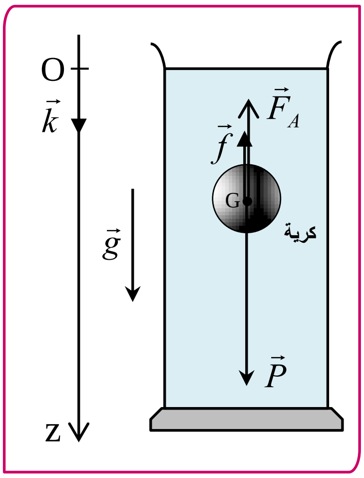
I.Chute verticale avec Frottement (sm+pc)

1. Rappel

Le mobile est soumis à trois forces

- Poids : $\vec{P} = m.\vec{g} = m.g.\vec{k}$
- Poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = -m_f.g.\vec{k}$ avec m_f : masse du fluide déplacé
- Forces de frottements fluide : $\vec{f} = -k.v_G^n.\vec{k}$ avec k est une constante



Caractéristiques des forces :

	Direction :	Sens :	Intensité :	Composante sur Oz
$\vec{P}$	La verticale (parallèle à l'axe Oz)	Vers le bas	P = m.g	$P_z = m.g$
$\vec{F}_A$		Vers le haut	$F_A = m_f.g$	$F_{Az} = - m_f.g$
$\vec{f}$		Vers le haut	$f = k.V^n$	$f_z = - k.V^n$

2.Equation différentielle vérifiée par la vitesse:

On applique alors la deuxième loi de Newton : $\sum F = m.\vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

En projetant la relation vectorielle sur l'axe vertical, Oz dirigé vers le bas :

$$P_z + F_{Az} + f_z = m.a_z \quad \text{et} \quad P - F_A - f = m.a_z \quad \text{d'où} \quad m.g - m_f.g - k.V^n = m.a_z$$

On obtient alors l'expression : $m\,g - m_f.g - k.v^n = m\frac{dv}{dt}$

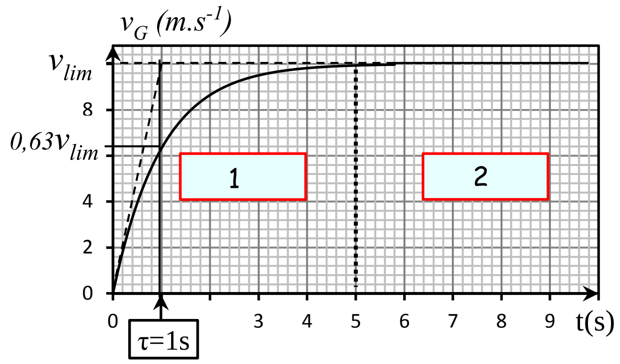
$$g.(m - m_f) - k.v^n = m\frac{dv}{dt} \quad \text{et par suite} \quad \frac{dv}{dt} = g.\frac{m - m_f}{m} - \frac{k}{m}.v^n$$: Equation différentielle

L'équation différentielle s'écrit sous la forme $\frac{dv}{dt} = B - A.v^n$ avec $A = g.\frac{m - m_f}{m} = g.(1 - \frac{m_f}{m})$ et $B = \frac{k}{m}$

Remarque :

On considère une sphère de masse volumique ρ, de volume V (m= ρ.V) en mouvement dans un fluide de masse volumique ρ_0 ($m_f = \rho_0.V$)

$$A = g.\frac{m - m_f}{m} = g.\left(1 - \frac{m_f}{m}\right) = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$



1: régime transitoire

2:régime permanent

Au cours d'une chute verticale avec frottement, le mouvement du centre d'inertie G du solide peut se décomposer en deux phase :

- Le régime initial ou transitoire, pendant lequel :
  - La vitesse v_G augmente.
  - La valeur f de la force de frottement fluide augmente
  - L'accélération a_G diminue.
- Le régime asymptotique ou permanent, pendant lequel
  - La vitesse v_G est égale à une vitesse constante v_ℓ.
  - La valeur f de la force de frottement fluide est constante
  - L'accélération a_G est nulle.

$$\frac{dv}{dt} = A - B.v_G^n$$

Le régime initial

$v_G = 0$ et $\frac{dv}{dt} = A - B.v_G^n = A$

Le régime permanent

La vitesse $v_G = v_\ell = C^{te}$.

$\frac{dv}{dt} = A - B.v_\ell^n = 0$

d'où $A = B.v_\ell^n$

et $v_\ell^n = \frac{A}{B}$ et $v_\ell = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$

Graphiquement

A $t = \tau$, La tangente à la courbe v(t) à t=0 et l' asymptote v= v_ℓ se croisent donc $V_\ell = a_0.\tau$

a_0 : le coefficient directeur de la tangente à la courbe v(t) à l'instant t=0 alors $a_0 = A$

3. La solution de l'equation differentielle par la éthode D'EULER

La méthode d'Euler est une méthode numérique **itérative** qui permet d'évaluer, à intervalles de temps réguliers, différentes valeurs approchées à partir des conditions initiales.

Il faut pour cela connaître :

- L'équation différentielle du mouvement $\frac{dv}{dt} = A - B.v_G^n$.
- Les conditions initiales v_0.
- Le pas de résolution Δt ; $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

On peut déterminer les grandeurs cinétiques (vitesses et accélérations) par :

✓ L'équation différentielle à l'instant t_i : $a_i = \frac{dv}{dt} = A - B.v_i^n$ (pour le même point : connaitre la vitesse d'un point c'est déterminer son accélération et réciproquement).

✓ L'expression de la vitesse : $V_{i+1} = V_i + a_i\,\Delta t$ (d'un point M_i vers un autre M_{i+1} : Connaitre la vitesse et l'accélération d'un point M_i on peut déterminer la vitesse du point suivant M_{i+1}).

$t_0 = 0$	$V_0 = 0$	$\rightarrow a_0 = A - B.(V_0)^n = A$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$V_1 = V_0 + a_0\,\Delta t$	$\rightarrow a_1 = A - B.(V_1)^n$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$V_2 = V_1 + a_1\,\Delta t$	$\rightarrow a_2 = A - B.(V_2)^n$

II. La chute libre d'un corps solide

Définition: Un solide est en chute libre lorsqu'il n'est soumis qu'à son poids .

- Les deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{g}$ ont le même sens et la même direction (les deux vecteurs sont colinéaires)
- La 2eme loi de newton $\sum \vec{F} = m.\vec{a}_G$ d'où $\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}_G$ donc $\vec{\mathbf{a}}_G = \vec{\mathbf{g}}$
- Les deux vecteurs $\vec{\mathbf{a}}_G$ et $\vec{g}$ ont les mêmes caractéristiques

1. Caractéristique du vecteur accélération $\vec{a}_G$

Origine : Le point G

Direction :
- La droite verticale
- La même direction que $\vec{\mathbf{g}}$ (même direction que le poids $\vec{\mathbf{P}}$)

Sens :
- Vers le bas
- Le même sens que $\vec{\mathbf{g}}$ (même sens que le poids $\vec{\mathbf{P}}$)

Intensité : $a_G = g$

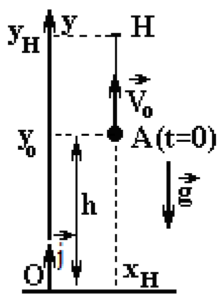
L'accélération est indépendante de la masse .

2. Coordonnées de $\vec{a}_G$ vecteur accélération :

$\mathbf{a_y = -g = C^{te}}$

A l'instant t= 0

$y_0 = h$ et $V_{0y} = V_0$



3. Nature du mouvement sur l'axe Oy

$a_y = -g = C^{te}$: Le mouvement est rectiligne uniformément varié sur l'axe Oy

$$\mathbf{y = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.t + y_0}$$

$\mathbf{V_y = -g.t + V_0}$

$$y \leftarrow t \rightarrow V_y$$

4. La flèche :

La flèche est l'altitude H la plus élevée atteinte par le projectile

- Au point H la composante de la vitesse est nulle $V_{Hy}=0$

$V_y = -g.t_H + V_0 = 0$ d'où $t_H = \frac{V_0}{g}$: l'instant d'arrivée au point H et o remplace dans y(t)

$$y_H = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0.\frac{V_0}{g} + y_0 = \frac{1}{2}.\frac{V_0^2}{g} + y_0$$

y_H: Ordonnée du point H d'où $AH = y_H - y_0 = \frac{1}{2}.\frac{V_0^2}{g}$

⁂ ***Exploiter les équations horaires avec une ou plusieurs informations***

Au point A	• $y(A)=h$ • L'instant de passage par le point A est $t_A = 2.t_H = \frac{2.V_0}{g}$ • La vitesse de passage par le point A est V_0
Au point O	• $y(O) = 0$