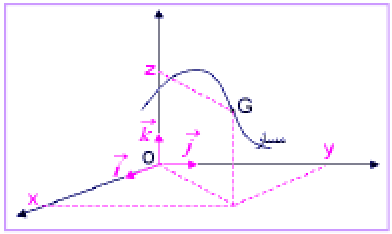
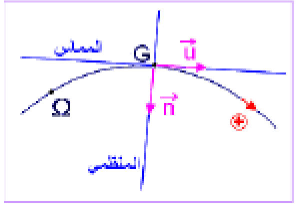
Mécanique :Lois de Newton

1)Mouvement du centre de gravité d'un solide

Repère de Dicarte



Repère de Fresnel



Le centre de gravité G est repéré par :

$\overline{OG} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

$s = \widehat{\Omega G}$

Equations Horaires ou équations paramétriques du mouvement

X = f(t), y = f(t), z = f(t)

s = f(t)

Equation de la trajectoire : on élimine le temps

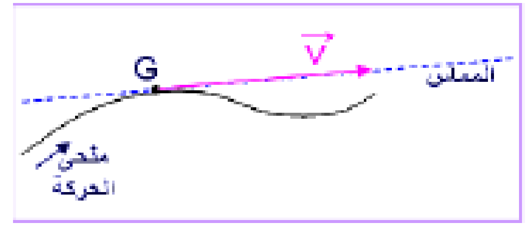
- Vecteur vitesse

La vitesse instantanée du centre de gravité est définie par :

$$\overline{V}_G = \frac{d\,\overline{OG}}{dt}$$

Propriétés d $\vec{V}$

- Origine : centre de gravité G
- Direction : tangente à la trajectoire
- Sens : sens du mouvement



Expression de V

Repère de Dicarte

$$\vec{V}_G = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{V}_G \begin{cases} v_x = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} \qquad (m.s^{-1}) \\ v_z = \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (m.s^{-1})$$

Repère de Fresnel

$$\vec{V}_G = v\,\vec{u}$$

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

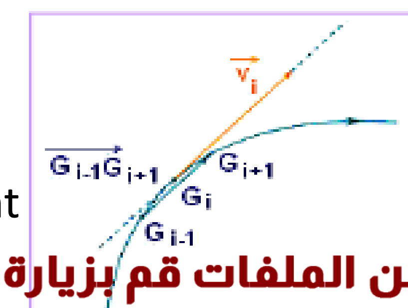
$$v = \pm \|\vec{V}\|$$

V > 0 G se déplace dans le sens du mouvement

V < 0 G se déplace dans le sens contraire du mouvement

Construction de V

A partir de l’enregistrement du mouvement à des intervalles de temps réguliers



$$\boxed{\vec{v}_i \approx \frac{\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}}{2\tau}}$$

➢ Vecteur accélération

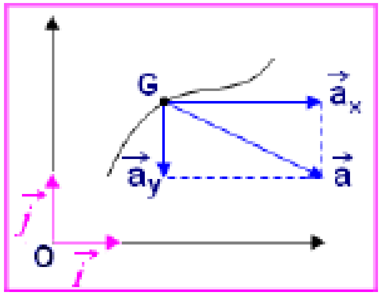
$$\boxed{\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}}$$

Repère de Dicarte

$$\vec{a}_G = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \qquad (m.s^{-2})$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (m.s^{-2})$$



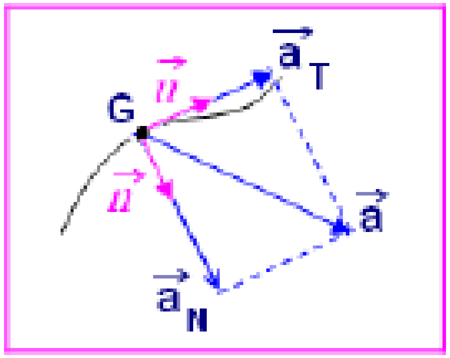
Repère de Fresnel

$$\vec{a}_G = a_T\,\vec{u} + a_N\,\vec{n}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \quad (m.s^{-2})$$



1)- Référentiels Galiléens.

Le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}$ permet de connaître si un mouvement est retardé ou accéléré.

$$\vec{a} \cdot \vec{v} \begin{cases} > 0 & \text{mouvement accéléré} \\ < 0 & \text{mouvement retardé} \\ 0 & \text{mouvement uniforme} \end{cases}$$

Lois de Newton

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel les lois de Newton sont vérifiées.

- Pour simplifier létude du système, on choisit toujours un référentiel adapté.

Première loi de Newton : le principe de l'Inertie

Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel n'est soumis à aucune force (système isolé) ou s'il est soumis à un ensemble de forces dont les effets se compensent (système pseudo-isolé), alors il est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \vec{V}_G = \vec{Cte}}$$

Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique.

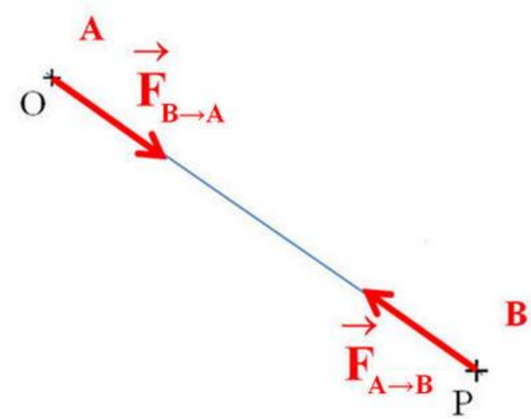
Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel est soumis à une ou plusieurs forces extérieures, alors la somme vectorielle de ces forces est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{Ou} \quad \boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G}$$

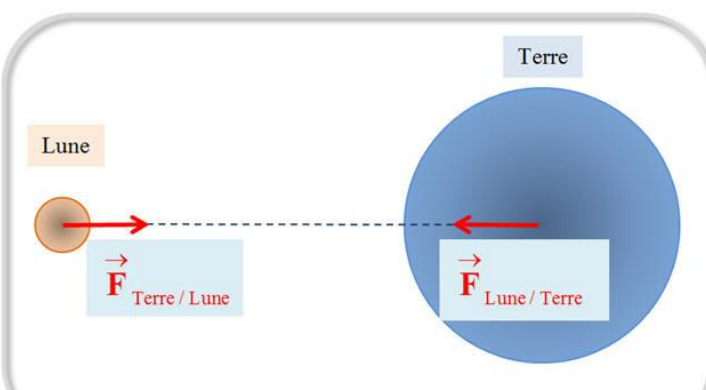
Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques.

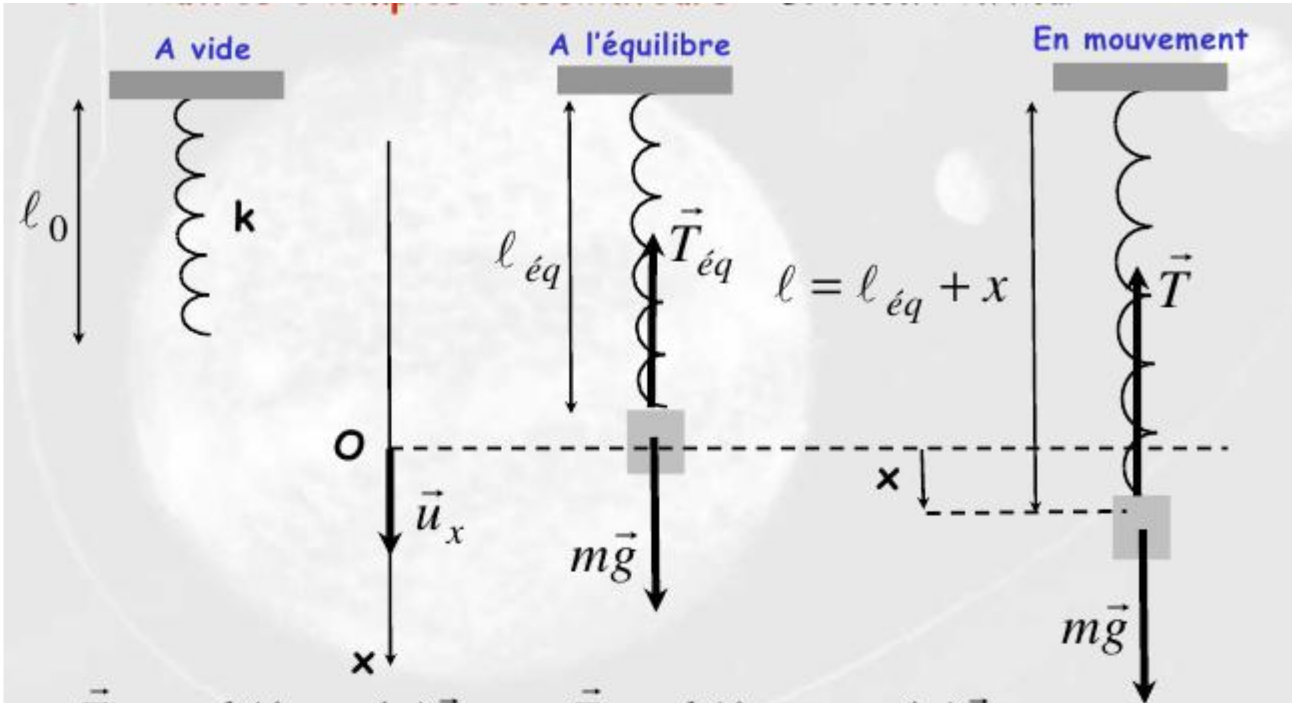
Soit deux corps A et B qui exercent mutuellement une force sur l'autre corps. Alors on a :

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$



Exemple





$$\vec{T}_{éq} = -k(\ell_{éq} - \ell_0)\vec{u}_x \quad ; \quad \vec{T} = -k(\ell_{éq} + x - \ell_0)\vec{u}_x$$

En l'absence de frottements :

A l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{T}_{éq} = \vec{0} \quad ; \quad -k(\ell_{éq} - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = \vec{0} \quad ; \quad \ell_{éq} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$

En mouvement : $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \quad ; \quad -k(\ell_{éq} + x - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = m\ddot{x}\,\vec{u}_x$

En tenant compte de la relation obtenue à l'équilibre :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (Avec\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

Exercice d'application 2

Un mobile se déplace dans le plan muni du repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$ *avec* un vecteur accélération $\vec{a}=-8\,\vec{j}$.
A l'instant initial t=0, le vecteur position du mobile ainsi que son vecteur vitesse sont donnés respectivement par : $\overrightarrow{OM_0} = -3\vec{i}+3\vec{j}$ et $\vec{V_0} = 2\vec{i}+4\vec{j}$

2.1. Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile est de la forme $y=A.x^2B.x+C$ où A, B et c sont des constantes à déterminer.

2.2. A quelle date le mobile atteint-il le sommet de sa trajectoire?

2.3. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t_0=0$ et $t_1=1s$.

2.4. Calculer l'accélération moyenne entre ces mêmes instants.

2.5. Sur quel intervalle de temps le mouvement est-il décéléré?

1) TCI $\Rightarrow \vec{P}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\vec{g}$

$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{z}=-g\end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases}\dot{x}=V_0\cos\alpha\\ \dot{z}=-gt+V_0\sin\alpha\end{cases}$

$\overrightarrow{OM}\begin{cases}x=V_0\cos\alpha\, t\\ z=-\frac{1}{2}gt^2+V_0\sin\alpha\, t+h\end{cases}$ — 1

2) $z=-\dfrac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha+h$ — 0,5

3) Coordonnée de S

$z'=-\frac{x_S}{5}+1=0 \Rightarrow x_S=5m$

$z_S=-\frac{25}{10}+5+2,7=5,2m$

S (5m ; 5,2m) — 1

4) la balle touche le sol pour $z=0$

$z=-\dfrac{x^2}{10}+x+2,7=0$

$x=12,21m$ ou $x=-2,21$ (impossible)

$x=V_0\cos\alpha\, t \Rightarrow t=\dfrac{x}{V_0\cos\alpha}$

$t=\dfrac{12,21}{10\times\cos 45}=1,73s$

$\vec{v}\begin{cases}\dot{x}=10\times\cos 45=7,07\\ \dot{z}=-10\times(1,73)+10\times\sin 45=-10,13\end{cases}$

$v=\sqrt{7,07^2+10,13^2}=12,35\,m\,s^{-1}$ — 1

$\tan\beta=\dfrac{-10,13}{7,07} \Rightarrow \beta=-55,1°$ — 0,5

5) On pose $\alpha=0$

$z=-\dfrac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha+h$

$z=-\dfrac{g}{2V_0^2}x^2+h$ — 0,5

6) $z(x=12)=-\dfrac{10}{2\times25^2}\times12^2+2,7=1,55m$

$z(x=L)=1,55m>1m$ donc la balle franchira le filet. — 1

$z=0 \Rightarrow x_{sol}=\sqrt{\dfrac{2V_0^2h}{g}}=18,4m$

$d=18,4m-12m=6,4m.$ — 0,5