Physique 8 : Le circuit (R, L, C)

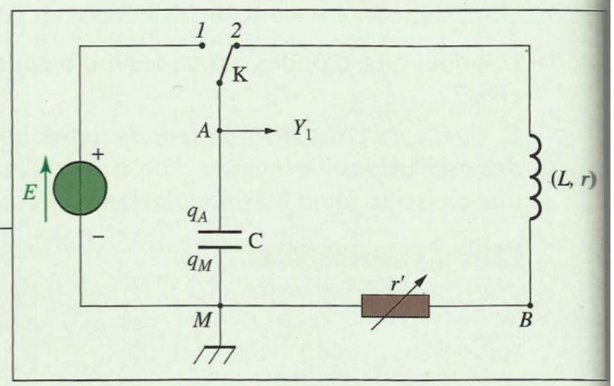
Une bobine et un condensateur constituent deux réservoirs d'énergie électrique. Étudions ce qui se passe lorsqu'un condensateur chargé est branché aux bornes d'une bobine.

1. Que se passe-t-il lorsqu'on relie un condensateur chargé et une bobine ?

Un circuit comportant un conducteur ohmique de résistance r', une bobine d'inductance L et de résistance r, et un condensateur de capacité C associés en série, est appelé **circuit (*R*, *L*, *C*)** série. $R = r + r'$ est la résistance totale du circuit.

1.1 Observation d'oscillations électriques

Étudions l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur chargé, branché aux bornes d'une bobine.



Doc. 1 *Montage expérimental permettant d'étudier un circuit (R, L, C) série.*

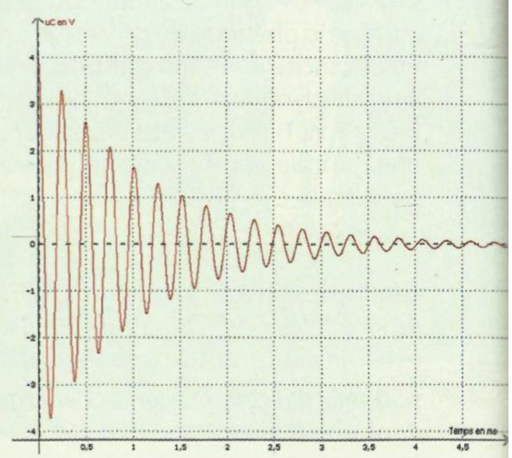
Activité 1

Comment évolue la tension aux bornes d'un condensateur chargé branché aux bornes d'une bobine ?

- Réaliser le montage du ***document 1*** en adoptant une faible valeur de r'.
- Charger le condensateur en plaçant le commutateur en position 1.
- Basculer le commutateur en position 2. La voie Y_1 est reliée au système d'acquisition d'un ordinateur. Réaliser l'acquisition et visualiser la tension u_{AM}.

1. Quelle est la valeur maximale prise par la tension u_{AM} lorsque le commutateur est en position 1 ?

2. Décrire et interpréter ce que l'on observe sur l'écran de l'ordinateur après avoir basculé le commutateur en position 2.



Doc. 2 *Oscillations électriques libres amorties.*

> Observation

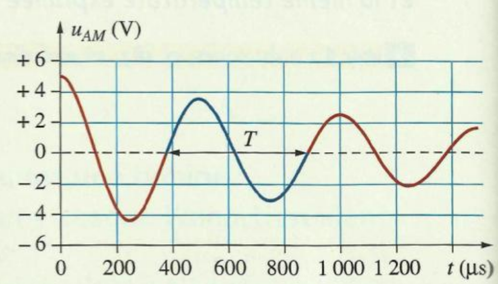
Pour une faible valeur de la résistance $R = r + r'$, nous observons **[Doc. 2]** des oscillations de la tension électrique aux bornes du condensateur dont l'amplitude décroît : ce sont des **oscillations libres amorties**.

> Interprétation

En plaçant le commutateur en position 1, la tension $u_C = u_{AM}$ prend la valeur E. Lorsque le commutateur passe en position 2, le condensateur se décharge dans le conducteur ohmique et la bobine.

La tension u_{AM} est alternativement positive et négative ; nous observons la répétition de séquences du type de celle représentée en bleu sur le ***document 3***.

La durée T d'une telle séquence est appelée **la pseudo-période** des oscillations électriques. On utilise le terme pseudo-période, et non celui de période, car l'amplitude de la tension ne reste pas constante.



Doc. 3 *La pseudo-période est la durée d'une séquence telle que celle représentée en bleu.*

Pour une faible valeur de la résistance *R*, un circuit (*R*, *L*, *C*) série, réalisé avec un condensateur initialement chargé, est le siège d'oscillations électriques libres amorties.

La pseudo-période *T* est la durée entre deux passages consécutifs par une valeur nulle de la tension, celle-ci variant dans le même sens.

1.2 Étude de l'amortissement des oscillations

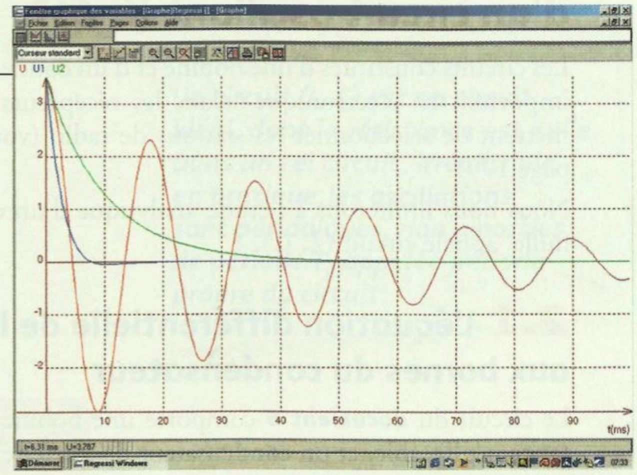
Quel est le rôle joué par la résistance d'un circuit (R, L, C) série ?

Activité 2

Quelle est l'influence de la valeur de la résistance R du circuit sur les oscillations ?

- Reprendre l'expérience de l'*activité* 1 en attribuant à r' des valeurs de plus en plus grandes.
- Pour chaque nouvelle valeur de r', et donc de $R = r + r'$, visualiser les oscillations électriques.

1. *Quelle est l'influence d'une augmentation de la valeur de la résistance ?*
2. *Qu'observe-t-on pour une très grande valeur de la résistance ?*
3. *La pseudo-période T dépend-elle de R ?*



Doc. 4 *Influence de la résistance sur les oscillations :*
– courbe rouge : régime pseudo-périodique ;
– courbe verte : apériodique ;
– courbe bleue : régime critique.

> Observation

Pour de faibles valeurs de R, nous observons des oscillations **[Doc. 4]** dont l'amplitude décroît progressivement : **c'est le régime pseudo-périodique.**

Lorsque la valeur de R est très faible, proche d'une valeur nulle, les oscillations durent longtemps : l'amortissement est faible **[Doc. 5]**. La pseudo-période est alors indépendante de R.

Pour des valeurs élevées de R, les oscillations disparaissent **[Doc. 4]** : la tension u_{AM} tend lentement vers zéro : **c'est le régime apériodique.**

La valeur de R qui délimite les deux régimes précédents est appelée **résistance critique**, on la note R_C.

Pour $R = R_C$, la tension tend le plus rapidement vers zéro sans oscillations **[Doc. 4]** : **c'est le régime critique.**

Un phénomène périodique se répète, à l'identique, à intervalles de temps consécutifs égaux.

Ici, les séquences consécutives ne sont pas identiques, car l'amplitude diminue : on a un régime pseudo-périodique.

Selon la valeur de la résistance R du circuit (R, L, C), on distingue les régimes pseudo-périodique, critique et apériodique.

Pour des valeurs faibles de la résistance R, la pseudo-période T d'un circuit (R, L, C) ne dépend pas de R.

1.3 Étude de la pseudo-période

Activité 3

Qu'observe-t-on lorsqu'on modifie les valeurs de C ou de L ?

Utiliser le montage de l'*activité* 1 et se placer dans le cas du régime pseudo-périodique.

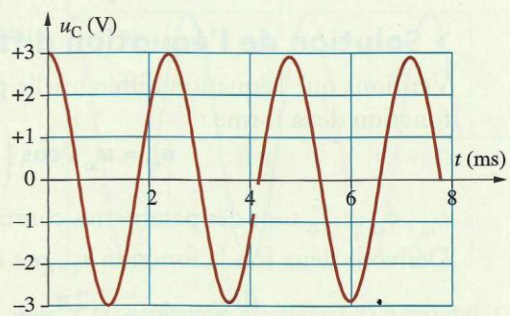
Quelle est l'influence de L et de C sur la pseudo-période ?

> Observation

Pour une valeur donnée de la capacité C, la pseudo-période augmente avec la valeur de l'inductance L de la bobine. Pour une valeur donnée de l'inductance L, la pseudo-période augmente avec la capacité C du condensateur.

La pseudo-période T d'un circuit (R, L, C) augmente avec la capacité C et avec l'inductance L.

> *Pour s'entraîner : Ex. 2 et 3*



Doc. 5 *Les oscillations d'un circuit (R, L, C) de très faible résistance, sont quasi périodiques, l'amplitude diminue très faiblement à chaque oscillation.*

2. Quelle loi décrit l'évolution temporelle d'un circuit oscillant (L, C) ?

Les circuits constitués d'une bobine et d'un condensateur jouent un rôle très important en électronique : dans les récepteurs radiophoniques, ils permettent de sélectionner les stations de radio (voir l'*activité préparatoire* A, page 179).

Nous nous limiterons à l'étude analytique d'un circuit idéal, de résistance nulle, appelé circuit (L, C).

2.1 L'équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur

Le circuit du ***document 6*** comporte une bobine d'inductance L, de résistance négligeable, et un condensateur de capacité C.

À chaque instant : $u_{AB} + u_{BD} + u_{DA} = 0$; $u_{BD} = 0$.

Notons : $u_{AB} = u_C$ et $u_{DA} = u_L = L \cdot \dfrac{di}{dt}$.

Nous avons donc : $u_C + L \cdot \dfrac{di}{dt} = 0$ **(1).**

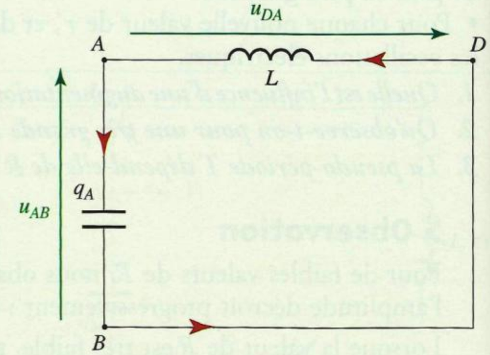
Exprimons $\dfrac{di}{dt}$ en fonction de u_C.

Notons $q = q_A$; $q = C \cdot u_C$ et $i = \dfrac{dq}{dt} = C \cdot \dfrac{du_C}{dt}$.

D'où $\dfrac{di}{dt} = C \cdot \dfrac{d^2u_C}{dt^2}$ que l'on peut écrire $\dfrac{di}{dt} = C \cdot \ddot{u}_C$.

La relation (1) devient :

$$u_C + L \cdot C \cdot \ddot{u}_C = 0 \text{ ou } \ddot{u}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_C = 0.$$



Doc. 6 Circuit (L, C) série.

Durant les oscillations électriques libres non amorties d'un circuit (L, C), la tension aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle : $\ddot{u}_C + \dfrac{1}{L \cdot C} \cdot u_C = 0$.

Notations des dérivées par rapport au temps

$\dfrac{du_C}{dt} = \dot{u}_C$;

$\dfrac{d^2u_C}{dt^2} = \ddot{u}_C$.

2.2 Évolution temporelle de la tension u_C

> Solution de l'équation différentielle

Vérifions que l'équation différentielle précédente admet pour solution une fonction de la forme :

$$u_C = u_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$$

u_m, ϕ_0 et T_0 sont des paramètres constants ne dépendant pas du temps.

Dérivons deux fois la fonction u_C, par rapport au temps :

$$\frac{du_C}{dt} = \dot{u}_C = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot u_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du_C}{dt}\right) = \frac{d^2u_C}{dt^2} = \ddot{u}_C.$$

Rappels mathématiques

a étant une constante, si $f(x) = \cos ax$:

$\dfrac{df}{dx} = f'(x) = -a \cdot \sin ax.$

$\dfrac{d^2f}{dx^2} = f''(x) = -a^2 \cdot \cos ax.$

$$\ddot{u}_C = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 . u_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} . t + \phi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} . u_C .$$

Substituons cette expression de $\ddot{u}_C$ dans l'équation différentielle :

$$\ddot{u}_C + \frac{1}{L . C} . u_C = 0 \text{ donne : } \left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{1}{L . C}\right) . u_C = 0.$$

Cette relation étant vérifiée quel que soit u_C :

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{1}{L . C};$$

soit : $$T_0 = 2\pi\sqrt{L . C}.$$

La fonction $u_C(t) = u_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} . t + \phi_0\right)$, avec $T_0 = 2\pi\sqrt{L . C}$, est solution de l'équation différentielle $\ddot{u}_C + \frac{1}{L . C} . u_C = 0$.

T_0, période propre des oscillations, ne dépend que de L et de C.
u_m et ϕ_0 sont des constantes qui ne dépendent que des conditions initiales portant sur la tension $u_C(0)$ et l'intensité $i(0)$ du courant à l'instant $t = 0$.

Un circuit (L, C) est un circuit idéal, dont la résistance est nulle. Dans un tel circuit, irréalisable en pratique, les oscillations sont périodiques, non amorties, de période T_0 appelée période propre du circuit.

La relation $T_0 = 2\pi\sqrt{L . C}$, est appelée *formule de* THOMSON (voir l'*activité préparatoire B*, page 179).

Nous pouvons faire varier T_0 en modifiant les valeurs de L ou de C. C'est sur ce principe qu'il est possible de sélectionner les stations radiophoniques sur les récepteurs (voir l'*activité préparatoire A*, page 179).

> Cohérence des unités

Vérifions que $\sqrt{L . C}$ s'exprime, comme T_0, en seconde.

À partir de la relation $u_L = L . \frac{di}{dt}$, on note que L s'exprime en $V . s . A^{-1}$.

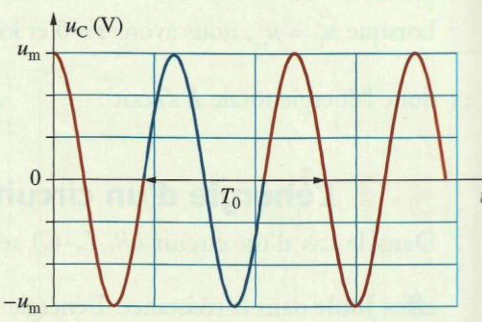
D'autre part, on a $q = C . u_C$ où q s'exprime en coulomb (C) ou en A . s et la capacité C en $A . s . V^{-1}$.

Donc le produit $L . C$ s'exprime en $V . s . A^{-1} . A . s . V^{-1}$, c'est-à-dire en s^2.

$\sqrt{L . C}$ s'exprime donc en seconde, comme la période T_0.

> Signification de u_m et ϕ_0

- La tension u_C varie entre $-u_m$ et $+u_m$; u_m ,valeur maximale de la tension, est **l'amplitude**.
- La phase est la quantité $\phi = \frac{2\pi}{T_0} . t + \phi_0$. À l'origine des temps (instant $t = 0$), la phase prend la valeur ϕ_0 ; ϕ_0 est **appelée la phase à l'origine des dates**.
- Pour déterminer les valeurs de u_m et ϕ_0, on exprime les valeurs de u_C et de $i = \frac{dq}{dt} = C . \frac{du_C}{dt}$ à l'instant $t = 0$, soit $u_C(0)$ et $i(0)$ qui sont appelées conditions initiales (voir le ***document 7*** et l'*exercice résolu* 1, page 191).



Doc. 7 *Les oscillations électriques d'un circuit (L, C) sont sinusoïdales. La période propre est la durée d'une séquence telle que celle représentée en* ***bleu****.*
Pour ce graphique :
$u_C(t) = u_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} . t\right)$ car à $t = 0$, $u_C(0) = u_m$.

2.3 Évolutions de la charge q et de l'intensité i

À partir de l'équation $u_C = u_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$, nous obtenons [Doc. 8] :

– l'expression de la charge du condensateur $q = C \cdot u_C$,

$q = q_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$, avec $q_m = C \cdot u_m$;

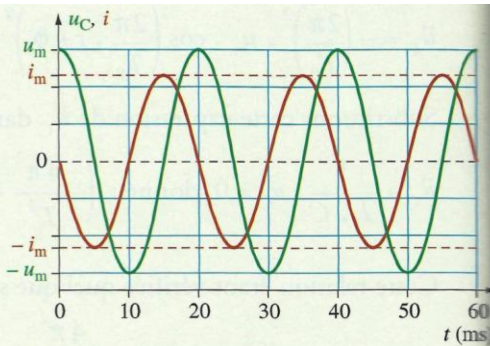
– l'expression de l'intensité i du courant : $i = \frac{dq}{dt}$,

$$i = -q_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right) = i_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$$

$$= i_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

avec $i_m = q_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} = C \cdot u_m \cdot \frac{2\pi}{T_0}$.

Pour s'entraîner : Ex. 5 et 6



Doc. 8 *Représentation de la tension u_C aux bornes du condensateur et de l'intensité i du courant :*

- $u_C(t) = u_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$;
- $i = i_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Comment s'effectuent les échanges d'énergie dans un circuit oscillant ?

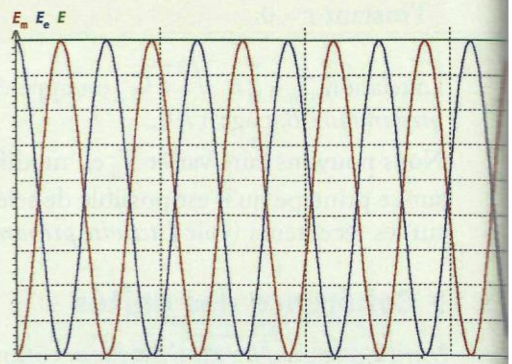
Dans les chapitres précédents, nous avons vu que le condensateur peut stocker de l'énergie électrique E_e et que la bobine peut stocker de l'énergie magnétique E_m.

Que se passe-t-il du point de vue énergétique lorsqu'on connecte un condensateur chargé à une bobine ?

3.1 L'énergie d'un circuit (L, C) série

L'énergie d'un circuit (L, C) idéal, circuit oscillant non amorti, est à chaque instant la somme des énergies électrique et magnétique emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine :

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2.$$



Doc. 9 *Évolution, au cours du temps, des énergies électrique E_e (courbe bleue) et magnétique E_m (courbe rouge), ainsi que l'énergie totale E (courbe verte) dans un circuit (L, C) série.*

Le **document 9** montre l'évolution au cours du temps des énergies E_e et E_m. Nous constatons que $E = E_e + E_m$ est constante dans le cas d'un circuit (L, C) idéal.

Lorsque $u_C = u_m$, nous avons $i = 0$ et lorsque $u_C = 0$, $i = i_m$,

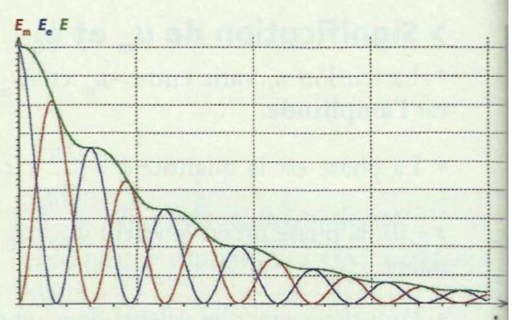
donc l'énergie totale E s'écrit : $E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_m^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_m^2$.

3.2 L'énergie d'un circuit (R, L, C) série

Dans le cas d'un circuit (R, L, C) série, il y a **dissipation d'énergie par effet Joule** dans la résistance. L'énergie $E = E_e + E_m = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$

n'est plus constante, elle diminue au cours du temps [Doc. 10].

Dans un circuit (R, L, C), l'amortissement des oscillations est dû à une perte d'énergie par effet Joule.



Doc. 10 *Évolution, au cours du temps, des énergies électrique E_e (courbe bleue) et magnétique E_m (courbe rouge), ainsi que l'énergie totale E (courbe verte) dans un circuit (R, L, C) série.*

Exercice d'entraînement

Le **document 10** présente l'évolution des énergies E_e (courbe bleue), E_m (courbe rouge) et $E = E_e + E_m$ (courbe verte).

1. Que représente le coefficient directeur de la tangente en un point de la courbe verte ? En quelle unité se mesure-t-il ?

2. Comparer les pentes de ces tangentes en un point coïncidant avec un sommet de la courbe rouge et en un point coïncidant avec un sommet de la courbe bleue. Expliquer la différence constatée.

> *Pour s'entraîner : Ex. 11*

4. Comment peut-on entretenir des oscillations non amorties ?

Les oscillations d'un circuit comportant une bobine et un condensateur sont toujours amorties, car le circuit possède toujours une résistance (bobine, fils de connexion). Il en résulte des pertes d'énergie par effet Joule qui doivent être compensées si on veut entretenir les oscillations.

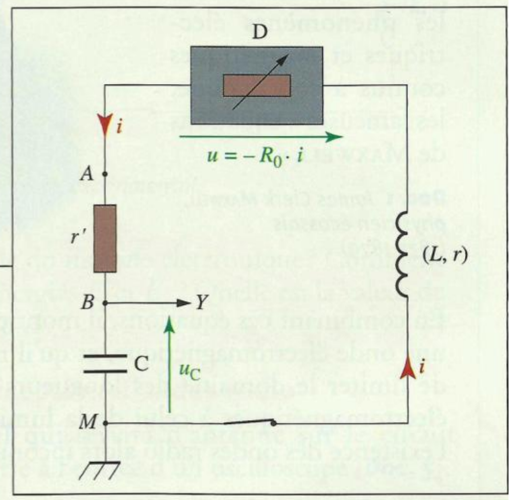
Activité 4

Comment obtenir des oscillations auto-entretenues ?

- Réaliser une association en série d'un condensateur et d'une bobine.
- Brancher le dipôle (R, L, C) aux bornes A et M d'un module électronique possédant une alimentation propre **[doc. 11]**. On note $R = r + r'$.
- Visualiser, avec un ordinateur, la tension u_C aux bornes du condensateur.
- Ajuster la valeur de R_0, résistance de réglage du module électronique, pour obtenir des oscillations d'allure sinusoïdale.

1. Qu'observe-t-on lorsque la valeur de R_0 est trop faible ?

2. Comparer la valeur de la période des oscillations obtenues à la période propre T_0 d'un circuit (L, C) (L, R et C sont connues).



Doc. 11 *Dipôle (R, L, C) branché au module électronique qui compense les pertes par effet Joule. L'alimentation du module n'est pas représentée.*

> Observation

Pour de faibles valeurs de R_0, nous n'observons aucune oscillation.

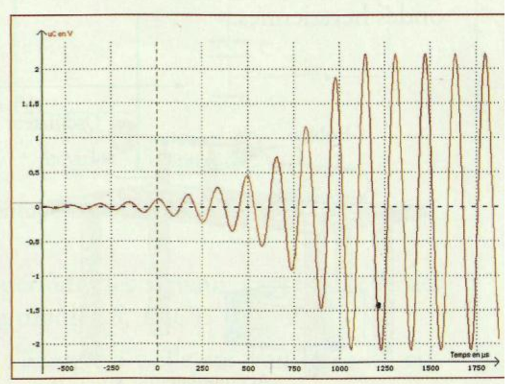
En augmentant la valeur de R_0, pour une valeur particulière, des oscillations prennent naissance **[doc. 12]**. Ces oscillations, d'allure sinusoïdale, ont une période égale à la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$ du circuit (L, C).

> Interprétation

Le dipôle (R, L, C) puise périodiquement, à sa propre fréquence, de l'énergie dans le module électronique pour compenser les pertes dues à l'effet Joule. Le module fournit l'énergie pour l'entretien des oscillations.

Les oscillations d'un circuit (R, L, C) série peuvent être entretenues par un module électronique qui compense les pertes d'énergie par effet Joule.

> *Pour s'entraîner : Ex. 12*



Doc. 12 *Mise en oscillations entretenues d'un circuit (R, L, C).*