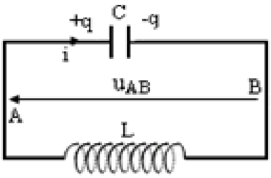
Niveaux: SM PC SVT	Matière: Physique
PROF :Zakaryae Chriki	Résumé N:8

Le circuit RLC série

Dipôle LC : association série d'un condensateur chargé de capacité C et de charge initiale q_0 et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r négligeable.

I.Etude du circuit LC

1. Montage : Décharge d'un condensateur dans une bobine



2. Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $Uc + U_L = 0$ et les transitions :

$$q = C.Uc \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = C.\frac{d^2U_C}{dt^2} \quad U_L = r.i + L.\frac{di}{dt} = L.\frac{di}{dt} \quad ; \quad r=0$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

$$Uc + U_L = Uc + r.i + L.\frac{di}{dt} = Uc + L.\frac{di}{dt} = 0$$

Variable Uc:

$$Uc + L.\frac{di}{dt} = U_C + L.C.\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.U_C = 0$$

Variable q:

$$Uc + L.\frac{di}{dt} = U_C + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.q = 0 \quad \text{Avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

ω_0 : Pulsation propre (en rad/s)

3. Equation horaire ou la solution :

Soit Uc(t) comme variable, la solution est :

$$Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

avec

Um : L'amplitude (la valeur maximale de la tension Uc(t)

$\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi$:La phase à l'instant t

φ: la phase à l'origine des temps t=0

T_0 : la période propre (s)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$: Pulsation propre (en rad/s)

3.1.Déterminer T_0 la période propre :

Remplacer la solution et sa dérivée seconde dans l'équation différentielle :

$$Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \qquad \frac{dUc(t)}{dt} = -Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \qquad \frac{d^2Uc}{dt^2} = -Um.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.U_C = 0$$

$$-Um.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) + \frac{1}{LC}.Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) = 0 \quad \text{donc} \quad Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right).\left(-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

L'équation est juste si $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0$ et $\frac{1}{LC} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$, on en déduit alors $T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$

Remarque :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.\pi.\sqrt{L.C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad \text{d'où} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

3.2.Déterminer Um et φ par les conditions initiales :

A t=0 :
- Le condensateur est chargé et $Uc(0) = U_0 = E$
- i(0)=0 : le circuit est ouvert

On remplace les conditions initiales dans les expressions de Uc(t) et i(t) à l'instant t=0 .

$$Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad i(t) = C.\frac{dUc(t)}{dt} = -C.Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

A l'instant t=0

$$Uc(0) = Um.\cos(\varphi) \quad \text{et} \quad i(0) = -C.Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi)$$

(1)	(2)	(3)
$Uc(0) = Um.\cos(\varphi) = E$ $\cos(\varphi) = \frac{E}{U_m}$	et $i(0) = -C.Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi) = 0$ alors $\sin(\varphi) = 0$ d'où φ=0 ou φ=π	Or $E > 0$ et $Um > 0$ alors $\cos(\varphi) = \frac{E}{U_m} > 0$ d'où φ=0

De la relation **(1)** on en déduit : $U_m = \frac{E}{\cos(\varphi)} = \frac{E}{\cos(0)} = E$

Conclusion : Um=E , φ=0 , et $T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$ alors : $Uc(t) = E.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

3.3.Expression de l'intensité de courant :

$i = C.\frac{dU_c}{dt} = -C.Um.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) = Im.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$: Expression de l'intensité de courant

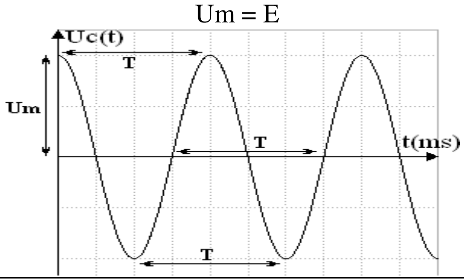
Avec $Im = C.Um.\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right) = C.Um.\left(\frac{2.\pi}{2.\pi.\sqrt{L.C}}\right) = Um.\sqrt{\frac{C}{L}}$

3.4.Quelques courbes :

❖ **Tension Uc(t):**

$$Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$$

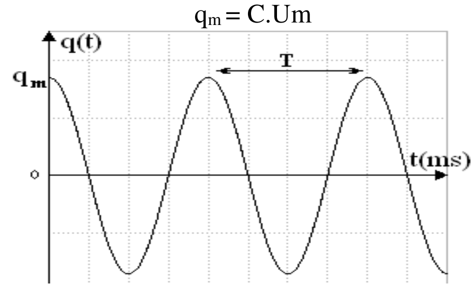
Um = E



❖ **Charge q(t):**

On a **q = C.Uc d'où** $q(t) = C.Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

$q_m = C.Um$



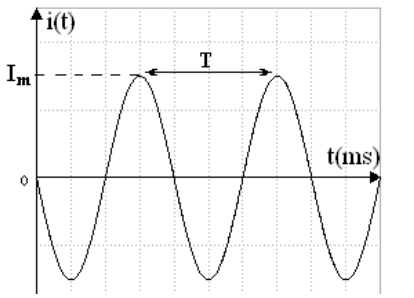
❖ **Intensité de courant i(t):**

$$i(t) = C.\frac{dUc(t)}{dt} = -C.Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$$

$$Im = C.Um.\frac{2\pi}{T_0}$$

Or $T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$ alors

$$Im = C.Um.\left(\frac{2.\pi}{2.\pi.\sqrt{L.C}}\right) = Um.\sqrt{\frac{C}{L}}$$



4. Energie totale E_T :

L'énergie totale E_T emmagasinée dans un circuit LC est à tout instant la somme de l'énergie électrique Ee dans le condensateur et de Em l'énergie magnétique dans la bobine

E_T= Ee + Em avec $Ee = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C.U_C^2$ donc $Em = \frac{1}{2}L\,i^2 = \frac{1}{2}.L.(\frac{U_R}{R})^2 = \frac{1}{2}.\frac{L}{R^2}.U_R^2$

5. Conservation de l'énergie totale E_T :

on sait que : $E_T = Ee + Em = \frac{1}{2}C.U_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$ et on dérive $\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}C.U_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2)$; $(f^n)'=n.f^{n-1}.f'$ et $f^2=2.f.f'$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}C.\frac{d}{dt}U_C^2 + \frac{1}{2}L.\frac{d}{dt}i^2$$

; $\frac{dUc^2}{dt} = 2.Uc.\frac{dUc}{dt}$ et $\frac{di^2}{dt} = 2.i.\frac{di}{dt}$

$$= \frac{1}{2}C.(2.Uc.\frac{dUc}{dt}) + \frac{1}{2}L.(2.i.\frac{di}{dt})$$

; $i = C.\frac{dUc}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2Uc}{dt^2}$

$$= C.Uc.\frac{dUc}{dt} + L.i.\frac{di}{dt}$$

$$= C.Uc.\frac{dUc}{dt} + L.i.\frac{di}{dt}$$

$$= C.Uc.\frac{dUc}{dt} + L.(C.\frac{dUc}{dt}).(C.\frac{d^2Uc}{dt^2})$$

$$= C.\frac{dUc}{dt}\left(Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2}\right) \qquad ; Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2} = 0 : \text{Equation différentielle}$$

$$= 0$$

Conclusion :

$E_T = C^{te}$ est une constante au cours du temps donc l'énergie totale se conserve.

Les oscillations correspondent à un échange énergétique entre le condensateur et la bobine : Il y a conversion d'énergie électrique en énergie magnétique et réciproquement.

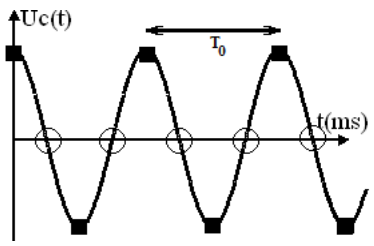
⁂ Exploiter les courbes :

$$i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dUc}{dt}$$

i(t) est la dérivée première de Uc(t) représentant une fonction sinusoïdale ($Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$) donc i(t) est nulle si Uc(t) (ou bien q(t)) est extrémum (soit maximum ou minimum) et inversement.

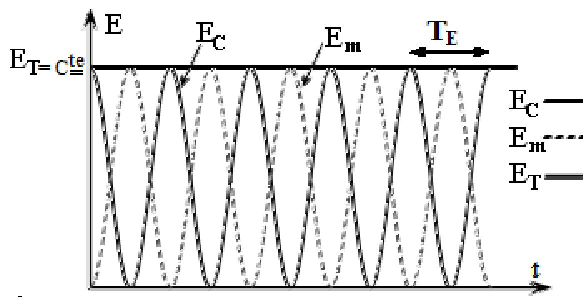
Points spécifiques sur la figure	Uc(t)	q(t)	i(t)	Ee	Em	E_T= Ee+Em
○	0	0	I_m	0	$Em = \frac{1}{2} L I_m^2$	$E_T = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L \frac{U_{Rm}^2}{R^2} = \frac{1}{2}.\frac{L}{R^2}.U_{Rm}^2$
■	U_m	q_m	0	$Ee = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}$	0	$E_T = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2}C.U_{Cm}^2$

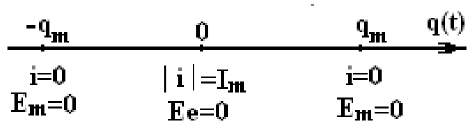
NB :
L'énergie totale dans un circuit LC est constante et est égale à l'énergie électrique initiale (maximale)



T_0=2.T_E

T_0 : période propre
T_E : période des énergies





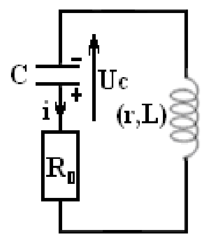
NB :
T_0 = 2.Te : La période propre des oscillations électriques T_0 est le double de la période des énergies Te

II.Etude du circuit RLC

1. Décharge d'un condensateur dans une bobine

Le montage est constitué de :

- Un condensateur de capacité C, initialement chargé et porteur de la charge q_0 et une tension U_0=E
- Une bobine de coefficient d'induction L et de résistance interne r
- Un conducteur ohmique de résistance R_0 La résistance totale du circuit est R = R_0 + r



2. Equation differentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_R + Uc + U_L = 0$ et les transitions :

$$U_R = R_0 i = R_0\frac{dq}{dt} = R_0 C.\frac{dUc}{dt} \quad \text{et} \quad U_L = r.i + L\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

$$q = C.Uc \quad \text{et } i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dUc}{dt}$$

Variable Uc:

$$R.i + Uc + L.\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc } R.C.\frac{dUc}{dt} + Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2} = 0 \quad \text{d'où } \frac{d^2Uc}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dUc}{dt} + \frac{1}{L.C}Uc = 0$$

Variable q:

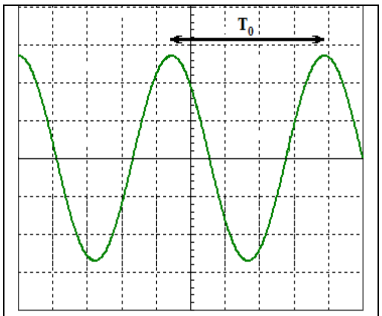
$$R.i + Uc + L.\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc } R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{d'où } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{L.C}q = 0$$

La grandeur $\frac{R}{L}.\frac{dUc}{dt}$ ou $\frac{R}{L}.\frac{dq}{dt}$

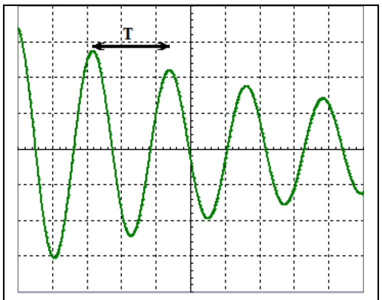
- Concrétise le caractère non-oscillatoire du système (l'amortissement des oscillations électriques)
- Détermine le régime des oscillations (periodique, pseudo périodique ou apériodique)

La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations, quand la résistance **R** du circuit est **:**

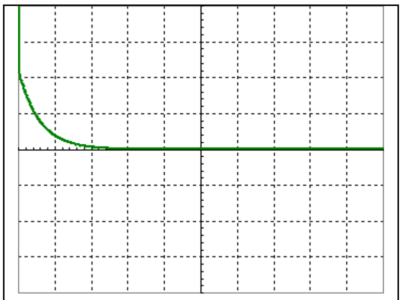
- **Faible** les oscillations du système sont amorties, le régime est **pseudopériodique**.
- **Élevée** le système n'oscille pas et donc le régime est apériodique



Régime périodique
T_0 : la période



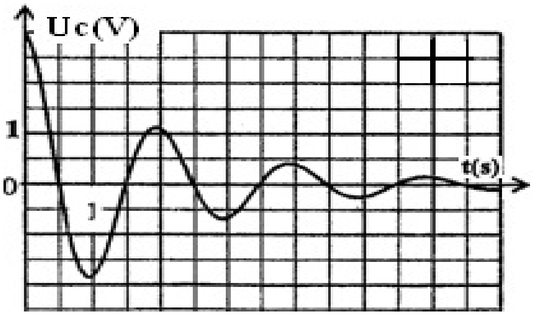
Régime pseudo périodique
T : la pseudo période



Régime apériodique

NB :
La période et la pseudo période sont considérés souvent égales $\mathbf{T \approx T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}}$

3. Courbe de la tension du condensateur (Régime pseudo périodique :



L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps

La cause : La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations

L'explication : Dissipation (perte) progressivement de l'énergie (initialement emmagasinée dans le condensateur) en énergie thermique par effet joule dans les résistances.

NB :
L'amortissement est d'autant plus important que la résistance est élevée

Un circuit électrique RLC, réalisé avec un condensateur chargé, est le siège d'oscillations électriques libres amorties.

4. Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine :

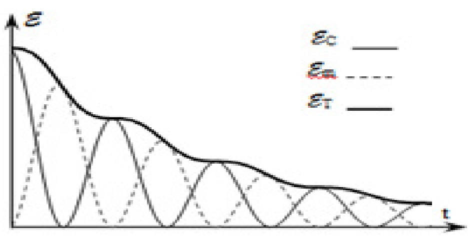
on sait que : $E_T = Ee + Em = \frac{1}{2}C.U_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$; $(f^n)' = n.f^{n-1}.f'$ et $f^2 = 2.f.f'$ et on dérive $\frac{dE_T}{dt} = C.\frac{dUc}{dt}\left(\mathbf{Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2}}\right)$

on a d'après l'équation déffentielle : ; $R.C.\frac{dUc}{dt} + Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2} = 0$ avec $\mathbf{Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2}} = -R.C.\frac{dUc}{dt}$

$\frac{dE_T}{dt} = C.\frac{dUc}{dt}\left(-R.C.\frac{dUc}{dt}\right)$ donc $\frac{dE_T}{dt} = R.(C.\frac{dUc}{dt})^2$ puisque $i = C.\frac{dUc}{dt}$ Alors $\frac{dE_T}{dt} = -R.i^2 < 0$

NB : $\mathbf{\frac{dE_T}{dt} = -R.i^2 < 0}$

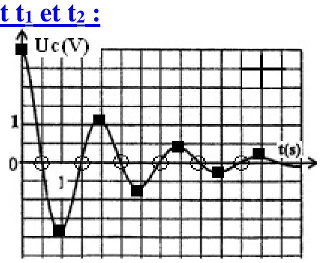
- Les oscillations correspondent à un échange énergétique entre le condensateur et la bobine : Il y a conversion d'énergie électrique en énergie magnétique et réciproquement.
- **Le circuit (RLC) est dissipatif d'énergie** : son énergie totale E_T diminue au cours du temps.



- Le phénomène d'amortissement résulte de la dissipation (perte) de l'énergie totale dans le circuit sous forme d'énergie thermique par effet joule

⁂ Comment calculer l'énergie dissipée entre deux instant t_1 et t_2 :

Points spécifiques sur la figure	Uc	i	E_e	E_m	E_T
■	Uc_m	0	$E_e = \frac{1}{2}C.U_{Cmax}^2$	0	$E_T = \frac{1}{2}C.U_{Cmax}^2$
○	0	I_m	0	$E_m = \frac{1}{2}L.I_{max}^2$	$E_T = \frac{1}{2}L.I_{max}^2$



$\Delta E_T = E_T(t_2) - E_T(t_1)$: L'énergie dissipée par effet joule entre les instants t_1 et t_2

Prof.Zakaryae Chriki

5. Entretien des oscillations

Entretenir des oscillations dans un circuit c'est lui fournir de l'énergie pour compenser les pertes par effet Joule dans les résistances, alors on ajoute au circuit un générateur de tensions

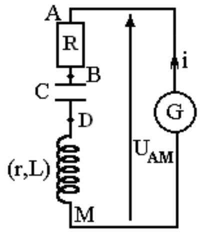
$$U_{AM} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DM}$$

$$U_{AM} = R.i + \frac{q}{C} + r.i + L.\frac{di}{dt}$$

$$U_{AM} = (R+r).\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2}$$

On en déduit l'équations différentielle :

$$\ddot{q} + \left(\frac{R+r}{L}\dot{q} - \frac{UAM}{L}\right) + \frac{1}{L.C}.q = 0$$



Si U_{AM}=(R+r).i La tension au borne du générateur est proportionnelle à l'intensité de courant et que le coefficient de proportionnalité est (R+r) alors $\ddot{q} + \frac{1}{L.C}.q = 0$

Conclusion :
Le générateur fournit au circuit l'énergie nécessaire pour compenser l'énergie dissipée (perdue) par effet Joule à condition que U_{AM}=(R+r).i