

Correction de l'examen national du baccalauréat

2 Bac SM F -2023- session normal

www.svt-assilah.com

Exercice 1 : Chimie

Partie 1 :

1-L'équation de la réaction du dosage :



2-Explication :

L'ajout de volume V_e de l'eau a pour but de diluer la solution (S_A) donc la quantité de matière de l'acide propanoïque reste constante à l'équivalence : $n_i(\text{acide}) = n_{aj}(\text{HO}^-) = C_B \cdot V_{BE}$.

Donc il n'y a pas d'influence sur le volume V_{BE} versé à l'équivalence.

3-l'expression τ en fonction de pH, K_e , C_B , V_A , V_t et V_B :

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction	$\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}_{(\text{aq})} + \text{HO}^-_{(\text{aq})} \rightarrow \text{C}_2\text{H}_5\text{COO}^-_{(\text{aq})} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$				
Etat initial	$C_A(V_A + V_e)$	$C_B \cdot V_{B1}$		0	En excès
Etat intermédiaire	$C_A(V_A + V_e) - x$	$C_B \cdot V_{B1} - x$		x	En excès
Etat final	$C_A(V_A + V_e) - x_f$	$C_B \cdot V_{B1} - x_f$		x_f	En excès

Expression du taux d'avancement : $\tau = \frac{x_f}{x_{\max}}$

Avant l'équivalence, le réactif limitant est HO^- car $C_B \cdot V_{B1} < C_A(V_A + V_e)$

$$C_B \cdot V_{B1} - x_{\max} = 0 \Rightarrow x_{\max} = C_B \cdot V_{B1}$$

$$[\text{HO}^-] \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] = K_e \Rightarrow [\text{HO}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_e}{10^{-\text{pH}}} = K_e \cdot 10^{\text{pH}}$$

D'après le tableau d'avancement :

$$[\text{HO}^-] = \frac{C_B \cdot V_{B1} - x_f}{V_A + V_e + V_{B1}} \Rightarrow C_B \cdot V_{B1} - x_f = [\text{HO}^-] \cdot (V_A + V_e + V_{B1}) \Rightarrow x_f$$

$$= C_B \cdot V_{B1} - K_e \cdot 10^{\text{pH}} \cdot (V_A + V_e + V_{B1})$$

$$\tau = \frac{C_B \cdot V_{B1} - K_e \cdot 10^{\text{pH}} \cdot (V_A + V_e + V_{B1})}{C_B \cdot V_{B1}} = 1 - \frac{K_e \cdot 10^{\text{pH}} \cdot (V_A + V_e + V_{B1})}{C_B \cdot V_{B1}}$$

$$\tau = 1 - \frac{K_e \cdot 10^{\text{pH}}}{C_B} \cdot \left(\frac{V_A + V_e + V_B}{V_{B1}} \right) \Rightarrow \tau = 1 - \frac{K_e \cdot 10^{\text{pH}}}{C_B} \cdot \left(1 + \frac{V_A + V_e}{V_{B1}} \right)$$

A.N :

$$\tau = 1 - \frac{10^{-14} \times 10^{4,8}}{2 \cdot 10^{-2}} \times \left(1 + \frac{10+50}{3,9} \right) = 0,99999 \approx 1$$

$\tau \approx 1$, donc la réaction est totale.

4-Calcul des concentrations $[\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}]$ et $[\text{C}_2\text{H}_5\text{COO}^-]$:

A l'équivalence, on a :

$$C_A \cdot (V_A + V_e) = C_B \cdot V_{BE} \Rightarrow C_A = \frac{C_B \cdot V_{BE}}{V_A + V_e} \Rightarrow C_A = \frac{2 \cdot 10^{-3} \times 7,8 \cdot 10^{-3}}{(10 + 50) \cdot 10^{-3}} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}] = \frac{C_A(V_A + V_e) - x_f}{V_A + V_e + V_{B1}} = \frac{C_A(V_A + V_e) - x_{\max}}{V_A + V_e + V_{B1}} = \frac{C_A(V_A + V_e) - C_B \cdot V_{B1}}{V_A + V_e + V_{B1}}$$

$$[C_2H_5COOH] = \frac{2,6 \cdot 10^{-3} \times (10 + 50) \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} \times 3,9 \cdot 10^{-3}}{(10 + 50 + 3,9) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow [C_2H_5COOH] = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[C_2H_5COO^-] = \frac{x_f}{V_A + V_e + V_{B1}} = \frac{x_{\max}}{V_A + V_e + V_{B1}} = \frac{C_B \cdot V_{B1}}{V_A + V_e + V_{B1}}$$

$$[C_2H_5COO^-] = \frac{2 \cdot 10^{-3} \times 3,9 \cdot 10^{-3}}{(10 + 50 + 3,9) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow [C_2H_5COO^-] = 1,22 \cdot 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

Déduction de la valeur du pK_A :

$$pH_1 = pK_A + \log \frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} \text{ on a : } [C_2H_5COO^-] = [C_2H_5COOH] = 1,22 \cdot 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1} \Rightarrow pH_1 = pK_A = 4,86$$

$$pK_A(C_2H_5COOH/C_2H_5COO^-) = pH_1 = 4,86$$

5-Justification de la nature basique du milieu à l'équivalence :

A l'équivalence il y a disparition totale des deux réactifs C_2H_5COOH et HO^- , le mélange réactionnel contient $C_2H_5COO^-$ et Na^+ et l'eau. Le milieu est basique $pH > 7$.

6-Calcul du pH :

Calcul de C concentration de l'acide propanoïque dans la solution (S), d'après la relation de dilution : $C \cdot V_A = C_A \cdot (V_A + V_e) \Rightarrow C = \frac{C_A \cdot (V_A + V_e)}{V_A} = C_A \cdot \left(1 + \frac{V_e}{V_A}\right)$

$$C = 2,6 \cdot 10^{-3} \times \left(1 + \frac{50}{10}\right) \Rightarrow C = 1,56 \cdot 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

Tableau d'avancement de la réaction de l'acide propanoïque est l'eau :

Equation de la réaction	$C_2H_5COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightarrow C_2H_5COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$				
Etat initial	$C \cdot V_A$	En excès	--	0	0
Etat intermédiaire	$C \cdot V_A - x$	En excès	--	x	x
Etat d'équilibre	$C \cdot V_A - x_{\text{éq}}$	En excès	--	$x_{\text{éq}}$	$x_{\text{éq}}$

$$[C_2H_5COO^-]_{\text{éq}} = [H_3O^+]_{\text{éq}} = \frac{x_{\text{éq}}}{V_A} \text{ et } [C_2H_5COOH]_{\text{éq}} = \frac{C \cdot V_A - x_{\text{éq}}}{V_A} = C - \frac{x_{\text{éq}}}{V_A} = C - [H_3O^+]_{\text{éq}}$$

$$Q_{r,\text{éq}} = K_A = \frac{[C_2H_5COO^-]_{\text{éq}} \cdot [H_3O^+]_{\text{éq}}}{[C_2H_5COOH]_{\text{éq}}} = \frac{[H_3O^+]_{\text{éq}}^2}{C - [H_3O^+]_{\text{éq}}}$$

$$K_A \cdot (C - [H_3O^+]_{\text{éq}}) = [H_3O^+]_{\text{éq}}^2 \Rightarrow [H_3O^+]_{\text{éq}}^2 + K_A \cdot [H_3O^+]_{\text{éq}} - C \cdot K_A = 0$$

$$\Delta = K_A^2 + 4K_A \cdot C$$

$$[H_3O^+]_{\text{éq}} = \frac{-K_A + \sqrt{K_A^2 + 4K_A \cdot C}}{2} \Rightarrow [H_3O^+]_{\text{éq}} = \frac{-10^{-pK_A} + \sqrt{10^{-2pK_A} + 4 \cdot 10^{-pK_A} \cdot C}}{2}$$

$$[H_3O^+]_{\text{éq}} = \frac{-10^{-4,86} + \sqrt{10^{-2 \times 4,86} + 4 \cdot 10^{-4,86} \times 1,56 \cdot 10^{-2}}}{2} = 3,57 \cdot 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H_3O^+]_{\text{éq}} = 3,339 \Rightarrow pH = 3,34$$

7-Vérification de la masse de l'acide propanoïque :

$$C = \frac{n}{V} = \frac{m}{M(C_2H_5COOH) \cdot V} \Rightarrow m = C \cdot M(C_2H_5COOH) \cdot V$$

$$m = 1,56 \cdot 10^{-2} \times 74 \times 40 \cdot 10^{-3} = 46,176 \cdot 10^{-3} \text{ g} \Rightarrow m \approx 46,2 \text{ mg}$$

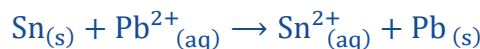
La masse de l'acide propanoïque est celle indiquée sur l'étiquette.

Partie 2 :

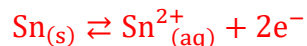
1-Le sens d'évolution du système chimique :

D'après la courbe $[Sn^{2+}] = f(t)$ on constate qu'au cours du fonctionnement de la pile $[Sn^{2+}]$ augmente donc Sn^{2+} est un produit.

Donc le système chimique évolue spontanément dans le sens (2) sens de formation des ions Sn^{2+} .



2-L'équation de la réaction qui se produit au niveau de l'anode :



3-Le schéma conventionnel de la pile :



4-Le sens de migration des ions Cl^{-} :

Dans le compartiment anodique, il y a oxydation de Sn à Sn^{2+} lors de fonctionnement de la pile, l'augmentation de nombre des ions Sn^{2+} produit la migration des ions chlorure Cl^{-} du pont salin vers le compartiment anodique pour assurer la neutralité électrique.

5-1-L'expression de $[Sn^{2+}]$ en fonction de C_2, V_2, F, I et t :

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction	$Sn_{(s)}$	$+ Pb^{2+}_{(aq)}$	$\rightarrow$	$Sn^{2+}_{(aq)}$	$+ Pb_{(s)}$
Etat initial	$n_i(Sn)$	$C_1 \cdot V_1$	--	$C_2 \cdot V_2$	$n_i(Pb)$
Etat intermédiaire	$n_i(Sn) - x$	$C_1 \cdot V_1 - x$	--	$C_2 \cdot V_2 + x$	$n_i(Pb) + x$
Etat d'équilibre	$n_i(Sn) - x_{eq}$	$C_1 \cdot V_1 - x_{eq}$	--	$C_2 \cdot V_2 + x_{eq}$	$n_i(Pb) + x_{eq}$

Pendant la durée t on a : $[Sn^{2+}]_t = \frac{C_2 \cdot V_2 + x}{V_2} = C_2 + \frac{x}{V_2}$

$$Q = I \cdot \Delta t = n(e^{-}) \cdot F \Rightarrow \text{On a : } n(e^{-}) = 2x \text{ et } \Delta t = t - \underset{=0}{t_0} = t$$

$$2x \cdot F = I \cdot t \Rightarrow x = \frac{I \cdot t}{2F}$$

$$[Sn^{2+}]_t = \frac{C_2 \cdot V_2 + x}{V_2} = C_2 + \frac{I \cdot t}{2F \cdot V_2}$$

5-2-Montrons la relation $K = \frac{2FC_2V_2 - I\Delta t}{2FC_2V_2 + I\Delta t}$:

L'expression de la constante d'équilibre est : $K' = \frac{[Sn^{2+}]_{eq}}{[Pb^{2+}]_{eq}}$ avec $K' = \frac{1}{K} \Rightarrow K = \frac{1}{K'}$

$$K = \frac{[Pb^{2+}]_{eq}}{[Sn^{2+}]_{eq}} = \frac{\frac{C_1 \cdot V_1 - x}{V_1}}{\frac{C_2 \cdot V_2 + x}{V_2}} \xrightarrow{\text{avec } V_1=V_2 \text{ et } C_1=C_2} K = \frac{C_2 \cdot V_2 - x}{C_2 \cdot V_2 + x} = \frac{C_2 \cdot V_2 - \frac{I \cdot \Delta t}{2F}}{C_2 \cdot V_2 + \frac{I \cdot \Delta t}{2F}} = \frac{2F \cdot C_2 \cdot V_2 - I \cdot \Delta t}{2F \cdot C_2 \cdot V_2 + I \cdot \Delta t}$$

Graphiquement : $C_2 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-3}$ et $\Delta t = 2,5 \cdot 10^3 \text{ s}$

$$K = \frac{2 \times 9,65 \cdot 10^4 \times 2 \cdot 10^{-2} \times 30 \cdot 10^{-3} - 17,13 \cdot 10^{-3} \times 2,5 \cdot 10^3}{2 \times 9,65 \cdot 10^4 \times 2 \cdot 10^{-2} \times 30 \cdot 10^{-3} + 17,13 \cdot 10^{-3} \times 2,5 \cdot 10^3} \Rightarrow K = 0,46$$

Exercice 2 :

1-Le retard temporel $\tau_{M/S}$:

$$\tau_{M/S} = t_M - t_0 = 7,5 - 0 \Rightarrow \tau_{M/S} = 7,5 \text{ s}$$

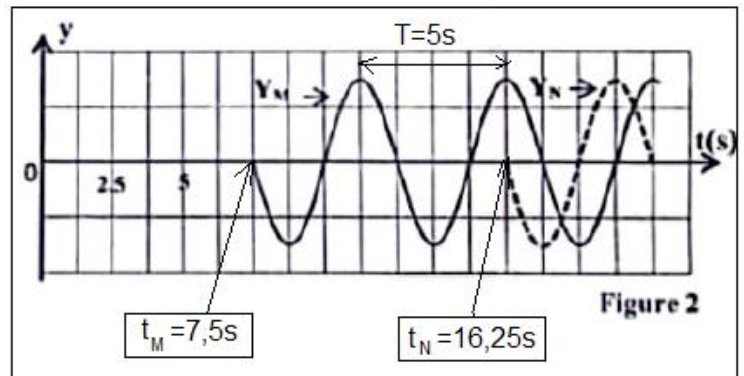
-Dédution de H_1 :

$$v_1 = \frac{L_1}{\tau_{M/S}} \text{ avec } v_1 = \sqrt{g \cdot H_1}$$

$$\sqrt{g \cdot H_1} = \frac{L_1}{\tau_{M/S}} \Rightarrow g \cdot H_1 = \left(\frac{L_1}{\tau_{M/S}} \right)^2$$

$$H_1 = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{L_1}{\tau_{M/S}} \right)^2$$

$$H_1 = \frac{1}{10} \times \left(\frac{30}{7,5} \right)^2 \Rightarrow H_1 = 1,6 \text{ m}$$



2-Calcul de H_2 :

Le retard de phase de N par rapport à M est : $\tau_{N/M} = t_N - t_M = 16,25 - 7,5 = 8,75 \text{ s}$

$$v_2 = \frac{L_2}{\tau_{N/M}} = \frac{L - L_1}{\tau_{N/M}} \text{ avec } v_2 = \sqrt{g \cdot H_2}$$

$$\sqrt{g \cdot H_2} = \frac{L - L_1}{\tau_{N/M}} \Rightarrow g \cdot H_2 = \left(\frac{L - L_1}{\tau_{N/M}} \right)^2 \Rightarrow H_2 = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{L - L_1}{\tau_{N/M}} \right)^2$$

$$H_2 = \frac{1}{10} \times \left(\frac{47,5 - 30}{8,75} \right)^2 = 0,4 \text{ m} \Rightarrow H_2 = 40 \text{ cm}$$

3-Calcul de λ_1 et λ_2 :

$$v_1 = \sqrt{g \cdot H_1} = \frac{\lambda_1}{T} \Rightarrow \lambda_1 = T \cdot \sqrt{g \cdot H_1}$$

D'après la figure 2, on a : $T = 5 \text{ s}$ AN :

$$\lambda_1 = 5 \times \sqrt{10 \times 1,6} \Rightarrow \lambda_1 = 20 \text{ m}$$

$$v_2 = \sqrt{g \cdot H_2} = \frac{\lambda_2}{T} \Rightarrow \lambda_2 = T \cdot \sqrt{g \cdot H_2}$$

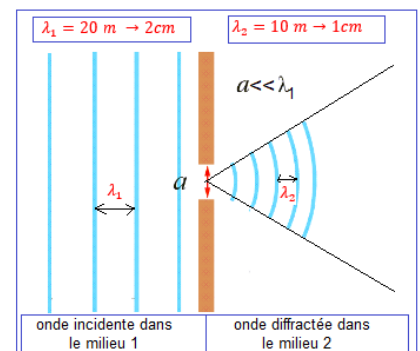
AN :

$$\lambda_2 = 5 \times \sqrt{10 \times 0,4} \Rightarrow \lambda_2 = 10 \text{ m}$$

4-1-Nom du phénomène avec justification :

Phénomène de diffraction car la condition d'obtenir la diffraction d'une onde mécanique est vérifiée : $(a \ll \lambda_1)$.

4-2-Représentation des crêtes :



Exercice 3 :

Partie 1 :

1-Charde d'un condensateur réel

1-1-Vérification de l'expression de i :

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

Loi d'ohm : $u_{Rd} = R_d \cdot i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{u_{Rd}}{R_d} \xrightarrow{u_{Rd}=u_C} i_1 = \frac{u_C}{R_d}$ et $i_2 = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

$$i = \frac{u_C}{R_d} + C \frac{du_C}{dt}$$

1-2-L'équation différentielle :

Loi d'additivité des tensions : $E = u_R + u_C$

$$u_R = R \cdot i = R \left(\frac{u_C}{R_d} + C \frac{du_C}{dt} \right)$$

$$E = R \left(\frac{u_C}{R_d} + C \frac{du_C}{dt} \right) + u_C = \frac{R \cdot u_C}{R_d} + R \cdot C \frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$= u_C \left(\frac{R}{R_d} + 1 \right) + R \cdot C \frac{du_C}{dt}$$

$$E = u_C \left(\frac{R + R_d}{R_d} \right) + R \cdot C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{E}{R \cdot C} = \frac{du_C}{dt} + \frac{(R + R_d)}{R \cdot R_d \cdot C} \cdot u_C$$

On pose :

$$A = \frac{E}{R \cdot C} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(R + R_d)}{R \cdot R_d \cdot C} \Rightarrow \tau = \frac{R \cdot R_d \cdot C}{R + R_d}$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_C = A$$

1-3-L'expression de $u_{C(max)}$ en fonction de R_d , R et E :

En régime permanent $u_C = u_{Cmax} = Cte$ donc $\frac{du_C}{dt} = \frac{du_{Cmax}}{dt} = 0$

L'équation différentielle s'écrit : $\frac{E}{R \cdot C} = \underbrace{\frac{du_C}{dt}}_{=0} + \frac{(R + R_d)}{R \cdot R_d \cdot C} \cdot u_{Cmax} \Rightarrow \frac{E}{R \cdot C} = \frac{(R + R_d)}{R \cdot R_d \cdot C} \cdot u_{Cmax}$

$$E = \frac{(R + R_d)}{R_d} \cdot u_{Cmax} \Rightarrow u_{Cmax} = \frac{E \cdot R_d}{R_d + R}$$

Comparaison de $u_{C(max)}$ à E :

$$R_d + R > R_d \Rightarrow \frac{R_d}{R_d + R} < 1 \Rightarrow \frac{E \cdot R_d}{R_d + R} < E \Rightarrow u_{Cmax} < E$$

1-4-La valeur de E et de R :

On a : $R_d \gg R \Rightarrow R_d + R = R_d$

$$u_{Cmax} = \frac{E \cdot R_d}{R_d} \Rightarrow u_{Cmax} = E$$

On utilisant le graphe de la figure 3 On trouve :

$$u_{Cmax} = E = 12 \text{ V et } \tau = 2,5 \text{ ms}$$

$$\tau = R \cdot C \Rightarrow R = \frac{\tau}{C} \quad \text{A.N: } R = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow R = 500 \Omega$$

2-Décharge du condensateur réel

2.1- Etablissement de l'équation différentielle :

Loi d'additivité des tensions : $u_{Rd} + u_C = 0 \Rightarrow R_d \cdot i + u_C = 0 \Rightarrow R_d \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

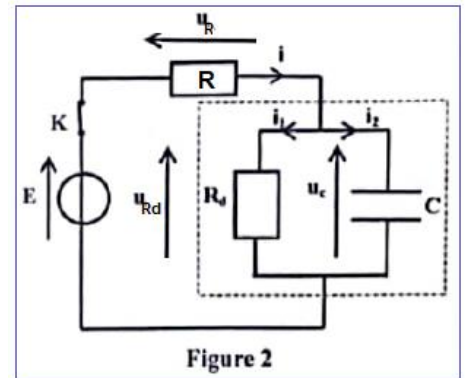


Figure 2

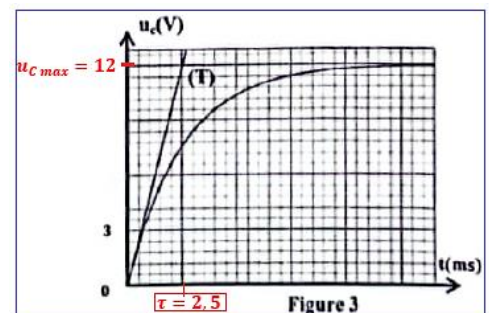


Figure 3

$$Rd.C.\frac{dq}{dt} + q = 0$$

2-2-1-La valeur de R_d :

La solution de l'équation différentielle:

$$q(t) = \beta.e^{-\lambda.t} \Rightarrow \frac{q(t)}{\beta} = e^{-\lambda.t} \Rightarrow -\lambda.t = \ln\left(\frac{q(t)}{\beta}\right) \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda}.\ln\left(\frac{q(t)}{\beta}\right)$$

On a : $q(0) = \beta.e^0 \Rightarrow \beta = q_{\max}$

$\frac{dq}{dt} = -\lambda.\beta.e^{-\lambda.t}$ on remplace dans l'équation différentielle :

$$-\lambda.\beta.Rd.C.e^{-\lambda.t} + \beta.e^{-\lambda.t} = 0 \Rightarrow \beta.e^{-\lambda.t}(1 - \lambda.Rd.C) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{Rd.C} = \frac{1}{\tau}$$

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda}.\ln\left(\frac{q(t_1)}{\beta}\right) = -Rd.C.\ln\left(\frac{q_1}{q_{\max}}\right) = Rd.C.\ln\left(\frac{C.u_{C\max}}{C.u_1}\right)$$

A $t_1 = 12 \text{ min}$ on a : $u_C = u_1 = 10 \text{ V}$ quand $t \rightarrow \infty$ on a : $u_{C\max} = E = 12 \text{ V}$

$$Rd = \frac{t_1}{C.\ln\left(\frac{E}{u_1}\right)} \Rightarrow \text{A.N: } Rd = \frac{12 \times 60}{5.10^{-6} \times \ln\left(\frac{12}{10}\right)} \Rightarrow Rd \approx 789,8.10^6 \Omega$$

2-2-2-Calcul de p à t_1 :

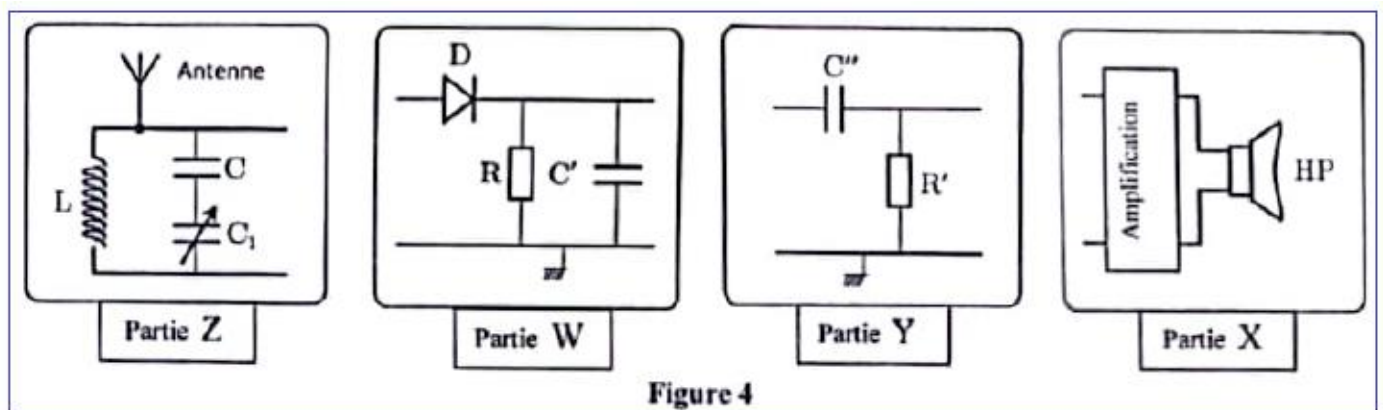
$$p = \frac{\xi_J}{\xi_0} = \frac{\xi_0 - \xi_{e1}}{\xi_0} = 1 - \frac{\xi_{e1}}{\xi_0} = 1 - \frac{\frac{1}{2}C.u_1^2}{\frac{1}{2}C.u_{C\max}^2} = 1 - \frac{u_1^2}{u_{C\max}^2} = 1 - \left(\frac{u_1}{E}\right)^2$$

A.N : $p = 1 - \left(\frac{10}{12}\right)^2 = 0,3055 \Rightarrow p = 30,55 \%$

Partie 2

1-Classement des parties X, Y, Z et W :

1- Z, W, Y, X.



2- La proposition juste : D

3-La valeur de C_1 :

$$F_P = F_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C_e}} \Rightarrow F_P^2 = \frac{1}{4\pi^2 L.C_e} \Rightarrow C_e = \frac{1}{4\pi^2 L.F_P^2}$$

A.N : $C_e = \frac{1}{4 \times 10 \times 10^{-3} \times (160.10^3)^2} = 1,1815.10^{-10} \text{ F} \Rightarrow C_e = 118,15 \text{ pF}$

Les deux condensateurs sont en série :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_e} - \frac{1}{C} = \frac{C - C_e}{C \cdot C_e} \Rightarrow C_e = \frac{C \cdot C_e}{C - C_e}$$

$$C_e = \frac{118,15 \times 150}{118,15 - 150} \Rightarrow C_e = 556,44 \text{ pF}$$

4-Le conducteur ohmique qui convient :

$$T_p \ll \tau < T_s \Rightarrow \frac{1}{F_p} \ll R \cdot C' < \frac{1}{F_s} \Rightarrow \frac{1}{C' \cdot F_p} \ll R < \frac{1}{C' F_s}$$

$$\frac{1}{20 \cdot 10^{-9} \times 460 \cdot 10^3} \ll R < \frac{1}{10^3 \times 460 \cdot 10^3} \Rightarrow 108,7 \Omega \ll R < 50000 \Omega$$

$$108,7 \Omega \ll R < 50 \text{ k}\Omega \Rightarrow R = 47 \text{ k}\Omega$$

Exercice 4 :

Partie 1 :

1- Les expressions de $v_x(t)$ et $v_z(t)$:

Système étudié : {le projectile}

Bilan des forces : $\vec{P}$ poids du projectile

Application de la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}_G$$

Projection dans le repère (o, x, z) :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

Les conditions initiales : à $t_0 = 0$ on a :

$$\vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ V_{0z} = V_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \text{ et } \vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = h \end{cases}$$

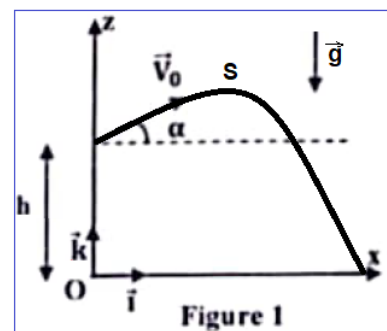
$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = \frac{d v_x}{dt} = 0 \\ a_z = \frac{d v_z}{dt} = -g \end{cases} \xrightarrow{\text{intégration}} \vec{V}_G \begin{cases} v_x = V_{0x} \\ v_z = -gt + V_{0z} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_G \begin{cases} v_x = V_0 \cdot \cos \alpha \\ v_z = -gt + V_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

2- L'expression de la norme v en fonction de t :

$$v^2 = v_x^2 + v_z^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \Rightarrow v = \sqrt{(V_0 \cdot \cos \alpha)^2 + (-gt + V_0 \cdot \sin \alpha)^2}$$

$$v = \sqrt{V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha + g^2 \cdot t^2 - 2g \cdot t \cdot V_0 \cdot \sin \alpha + V_0^2 \cdot \sin^2 \alpha} = \sqrt{V_0^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + g^2 \cdot t^2 - 2g \cdot t \cdot V_0 \cdot \sin \alpha}$$

$$v = \sqrt{g^2 \cdot t^2 - 2g \cdot t \cdot V_0 \cdot \sin \alpha + V_0^2}$$



3-1-La valeur V_0 :

Graphiquement $V_0 = 23 \text{ m.s}^{-1}$

3-2- Les composantes de V_{0x} et V_{0z} de V_0 :

Au sommet de la trajectoire la vitesse $\vec{V}_S$ est horizontale c.à.d :
 $V_{Sz} = 0$

$$V_S = \sqrt{V_{Sx}^2 + \underbrace{V_{Sz}^2}_{=0}} = V_{Sx} = V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha$$

Au sommet de la trajectoire la vitesse est minimale, on trouve : $V_S = V_{0x} = 20 \text{ m.s}^{-1}$

$$V_0^2 = V_{0x}^2 + V_{0z}^2 \Rightarrow V_{0z}^2 = V_0^2 - V_{0x}^2 \Rightarrow V_{0z} = \sqrt{V_0^2 - V_{0x}^2}$$

$$V_{0z} = \sqrt{23^2 - 20^2} \Rightarrow V_{0z} = 11,358 \text{ m.s}^{-1}$$

4- Vérification de $\alpha = 30^\circ$:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{V_{0x}}{V_0} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{V_{0x}}{V_0} \right)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{20}{23} \right) = 26,59^\circ \Rightarrow \alpha \simeq 30^\circ$$

5-1- Vérification de l'expression de Δt_1 :

$$\vec{V}_G \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + V_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{intégration}} \begin{cases} x(t) = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + z_0 \end{cases}$$

$$x(t) = V_0 \cdot \cos \alpha$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + h$$

Pour $z = z_1$, on a $t = t_1$:

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_1 + h \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_1^2 + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_1 + h - z_1 = 0$$

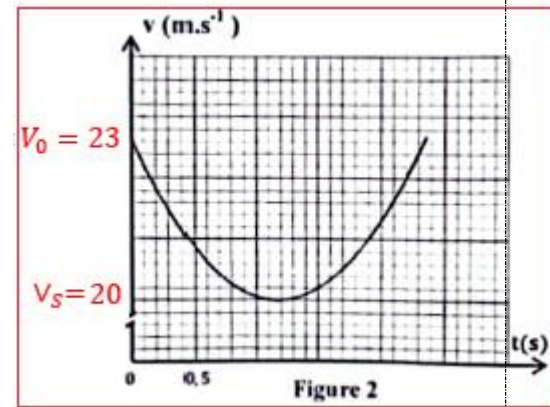
$$\Delta = (V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 4 \frac{(h - z_1)g}{2} \Rightarrow \Delta = (V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_1)$$

$$t_1 = t_{N_1} = \frac{V_0 \cdot \sin \alpha - \sqrt{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}$$

$$t'_1 = t_{M_1} = \frac{V_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}$$

$$\Delta t_1 = t_{M_1} - t_{N_1} = \frac{V_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g} - \frac{V_0 \cdot \sin \alpha - \sqrt{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}$$

$$\Delta t_1 = \frac{2\sqrt{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g}$$



De la même façon on trouve :

$$\Delta t_2 = t_{M_2} - t_{N_2} = \frac{2\sqrt{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_2)}}{g}$$

5-2-L'expression de H et déduction de la valeur de g :

$$(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2 = \left(\frac{2\sqrt{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_1)}}{g} \right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2g(h - z_2)}}{g} \right)^2$$

$$(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2 = \frac{4(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 8g(h - z_1)}{g^2} - \frac{4(V_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 8g(h - z_2)}{g^2} =$$

$$(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2 = \frac{8g(h - z_1)}{g^2} - \frac{8g(h - z_2)}{g^2} = \frac{8}{g}(z_2 - z_1) \quad \text{On pose } H = z_2 - z_1$$

$$(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2 = \frac{8}{g} \cdot H \Rightarrow H = \frac{g}{8} [(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2]$$

$$g = \frac{8H}{(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2} \Rightarrow g = \frac{8 \times 0,49}{(0,7)^2 - (0,3)^2} \Rightarrow g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$$

Partie 2 :

1-L'expression de l'énergie potentielle :

$$E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot z + \text{Cte}$$

L'état de référence : $E_{pp} = 0$ pour $z_0 = 0$ donc $\text{Cte} = 0$ et $E_{pp} = m \cdot g \cdot z$

Avec $z = \frac{a}{2}$; on obtient :

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot \frac{a}{2}$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K \cdot \Delta \ell^2 + \text{Cte} \quad \text{avec } \Delta \ell = x \text{ donc : } E_{pe} = \frac{1}{2} K \cdot x^2 + \text{Cte}$$

L'état de référence : $E_{pe} = 0$ quand le système est en équilibre $x_0 = 0$ donc $\text{Cte} = 0$ on obtient :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K \cdot x^2$$

$$E_p = m \cdot g \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} K \cdot x^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} (m \cdot g \cdot a + K \cdot x^2)$$

2- L'expression de $E_{pp}(t)$:

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left[m \cdot g \cdot a + K \cdot \left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \right)^2 \right] = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot a + \frac{K x_m^2}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

Graphiquement $T = 0,2 \text{ s}$ avec $T_0 = 2T = 2 \times 0,25 = 0,5 \text{ s}$

$$E_{p \min} = 2 \text{ mJ} = 2.10^{-3} \text{ J} \text{ et } E_{p \max} = 8 \text{ mJ} = 8.10^{-3} \text{ J}$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1$$

$$\cos^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi \right) = 0, \text{ on a: } E_p = E_{p \min} = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot a$$

$$\frac{1}{2} m \cdot g \cdot a = 2.10^{-3} \text{ J}$$

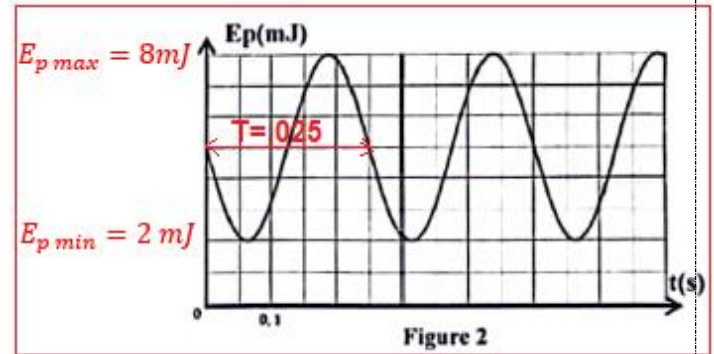
$$\cos^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi \right) = 1$$

$$E_p = E_{p \min} = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot a + \frac{Kx_m^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot g \cdot a + \frac{Kx_m^2}{2} = 8.10^{-3} \text{ J}$$

$$\frac{Kx_m^2}{2} = 8.10^{-3} \text{ J} - 2.10^{-3} \text{ J} = 6.10^{-3} \text{ J}$$

$$E_p = 6.10^{-3} \cdot \cos^2 \left(\frac{2\pi}{0,5} \cdot t + \varphi \right) + 2.10^{-3} \Rightarrow E_p = 6.10^{-3} \cdot \cos^2(4\pi t + \varphi) + 2.10^{-3}$$



3-La valeur de m , K et φ :

-Valeur de m :

$$\frac{1}{2} m \cdot g \cdot a = 2.10^{-3} \text{ J} \Rightarrow m = \frac{4.10^{-3}}{g \cdot a} \Rightarrow m = \frac{4.10^{-3}}{10 \times 2.10^{-2}} = 2.10^{-2} \text{ kg} \Rightarrow m = 20 \text{ g}$$

-Valeur de K :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{K} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T_0^2} \Rightarrow K = \frac{4 \times 10 \times 2.10^{-2}}{(0,5)^2} \Rightarrow K = 3,2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

-Valeur de φ :

Graphiquement on a : à $t_0 = 0$ on a : $E_p(0) = 5.10^{-3} \text{ J}$

$$\text{A } t_0 = 0 \text{ on a: } E_p(0) = 6.10^{-3} \cdot \cos^2 \varphi + 2.10^{-3} \Rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{E_p(0) - 2.10^{-3}}{6.10^{-3}} = \frac{5.10^{-3} - 2.10^{-3}}{6.10^{-3}} = 0,5$$

$$\cos^2 \varphi = 0,5 \Rightarrow \cos \varphi = \pm \sqrt{0,5} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\text{A } t_0 = 0 \text{ on a: } x(0) = x_m \cdot \cos \varphi > 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x(0)}{x_m} > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

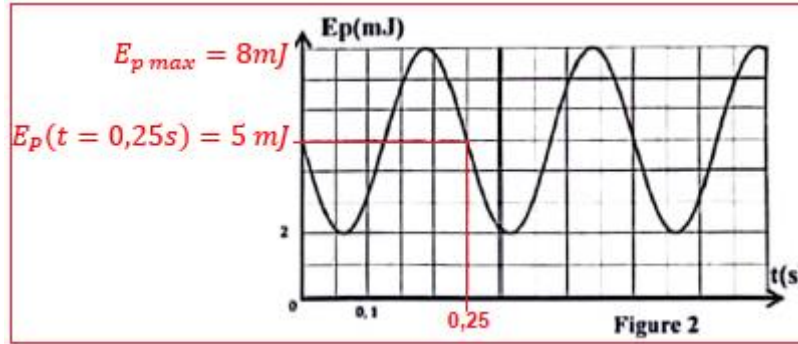
4-la norme de la vitesse à $t = 0,25 \text{ s}$:

$$E_m = E_p + E_c \text{ avec : } \begin{cases} E_m = E_{p \max} \\ E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \end{cases}$$

$$E_{p \max} = E_{pp}(t) + \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2(E_{p \max} - E_{pp}(t))}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(E_{p \max} - E_p(t))}{m}}$$

Graphiquement voir figure 2 : $E_{p \max} = 8.10^{-3} \text{ J}$ et $E_p(t = 0,25 \text{ s}) = 5.10^{-3} \text{ J}$

$$v = \sqrt{\frac{2(8 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3})}{2 \cdot 10^{-2}}} = 0,5477 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow v \simeq 0,55 \text{ m.s}^{-1}$$



www.svt-assilah.com