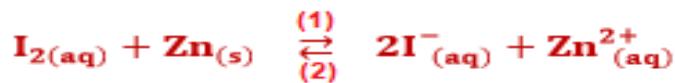


Correction de l'examen national du baccalauréat Session de rattrapage 2020 "science math (A) et (B)"

Exercice 1 : Chimie (6,5 points)

Partie I : Pile diiode-zinc

1-Le sens d'évolution spontanée du système :



Le quotient $Q_{r,i}$ de réaction dans l'état initial :

$$Q_{r,i} = \frac{[\text{I}^-]_i^2 \cdot [\text{Zn}^{2+}]_i}{[\text{I}_2]_i} \Rightarrow Q_{r,i} = \frac{(5,0 \cdot 10^{-2})^2 \times 0,10}{0,1} \Rightarrow Q_{r,i} = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$Q_{r,i} < K = 10^{46}$$

Selon le critère d'évolution d'un système chimique, le système évolue spontanément dans le sens direct (1), sens de formation de I^- et Zn^{2+} .

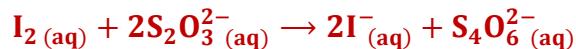
2- L'équation de la réaction qui se produit au niveau de la cathode :

Au niveau de la cathode se produit la réduction de I_2 :



3- Montrons que $n_e(\text{I}_2) = 7 \text{ mmol}$:

L'équation de la réaction de dosage :



La relation d'équivalence :

$$\frac{C_r \cdot V_E}{2} = n_R(\text{I}_2) \Leftrightarrow n_{versé}(\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = n_R(\text{I}_2)$$

$$\underbrace{n_0(\text{I}_2)}_{\text{initial}} = \underbrace{n_R(\text{I}_2)}_{\text{restant}} + \underbrace{n_C(\text{I}_2)}_{\text{consommé}} \Rightarrow n_C(\text{I}_2) = n_0(\text{I}_2) - n_R(\text{I}_2)$$

$$n_C(\text{I}_2) = C_1 \cdot V - \frac{C_r \cdot V_E}{2}$$

A.N : $n_C(\text{I}_2) = 0,10 \times 100 \cdot 10^{-3} - \frac{0,30 \times 20 \cdot 10^{-3}}{2} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \Rightarrow n_e(\text{I}_2) = 7 \text{ mmol}$

4- expression de Δt en fonction I_0 ; F et $n_C(I_2)$:

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$I_{2(aq)} + Zn_{(s)} \rightleftharpoons 2I_{(aq)}^- + Zn^{2+}_{(aq)}$					Quantité de matière d'é
Etat du système	Avancement	Quantité de matière en (mol)					
initial	0	$C_1 \cdot V$	En excès	-	$C_2 \cdot V$	$C_0 \cdot V$	$n(e^-) = 0$
pendant la durée Δt	x	$C_1 \cdot V - x$	En excès	-	$C_2 \cdot V + 2x$	$C_0 \cdot V + x$	$n(e^-) = 2x$

D'après le tableau d'avancement

$$\begin{cases} n(e^-) = 2x \\ n_C(I_2) = x \end{cases} \Rightarrow n(e^-) = 2n_C(I_2)$$

$$\begin{cases} Q = I_0 \cdot \Delta t \\ Q = F \cdot n(e^-) \end{cases} \Rightarrow F \cdot n(e^-) = I_0 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{F \cdot n(e^-)}{I_0} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{2F \cdot n_C(I_2)}{I_0}}$$

A.N : $\Delta t = \frac{2 \times 9,65 \cdot 10^4 \times 7,10^{-3}}{70 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 1,93 \cdot 10^4 \text{ s}}$

5- Calcul de $[Zn^{2+}]$:

D'après le tableau d'avancement :

$$[Zn^{2+}] = \frac{C_0 \cdot V + x}{V} = C_0 + \frac{x}{V}$$

$$n(e^-) = 2n_C(I_2) \Rightarrow 2x = 2n_C(I_2) \Rightarrow x = n_C(I_2)$$

$$\boxed{[Zn^{2+}] = C_0 + \frac{n_C(I_2)}{V}}$$

A.N : $[Zn^{2+}] = 0,1 + \frac{7,10^{-3}}{100 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{[Zn^{2+}] = 0,17 \text{ mol. L}^{-1}}$

Partie II : Réaction acido-basiques

1- L'équation modélisant la réaction du dosage :



2- Détermination de C_A :

La relation d'équivalence :

$$C_A \cdot V_A = C_B \cdot V_{BE} \Rightarrow \boxed{C_A = \frac{C_B \cdot V_{BE}}{V_A}}$$

AN :

$$C_A = \frac{0,10 \times 10,0}{10,0} \Rightarrow \boxed{C_A = 0,10 \text{ mol. L}^{-1}}$$

-Déduction de la formule chimique de l'acide :

$$M(C_n H_{2n+1} COOH) = 12n + (2n+1) \times 1 + 12 + 16 \times 2 + 1 = 14n + 46$$

$$C_A = \frac{m}{M \cdot V} \Rightarrow M = \frac{m}{C_A \cdot V} \Rightarrow 14n + 46 = \frac{m}{C_A \cdot V} \Rightarrow n = \frac{m}{14C_A \cdot V} - \frac{46}{14} \Rightarrow$$

$$n = \frac{2,3}{14 \times 0,10 \times 0,1} - \frac{46}{14} = 0$$

La formule chimique de l'acide HCOOH.

3-1- Détermination de τ :

$$\tau = \frac{x_f}{x_{\max}}$$

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction	$\text{HCOOH}_{(aq)} + \text{H}_2\text{O}_{(l)} \rightleftharpoons \text{HCOO}^-_{(aq)} + \text{H}_3\text{O}^+_{(aq)}$				
Etat initial	$C_A \cdot V$	En excès	-	0	0
Etat d'équilibre	$C_A \cdot V - x_{\text{éq}}$	En excès	-	$x_{\text{éq}}$	$x_{\text{éq}}$

D'après le tableau d'avancement :

$$x_{\text{éq}} = [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}} \cdot V = 10^{-\text{pH}} \cdot V \quad \& \quad x_{\max} = C_A \cdot V$$

$$\tau = \frac{10^{-\text{pH}} \cdot V}{C_A \cdot V} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{10^{-\text{pH}}}{C_A}}$$

AN : $\tau = \frac{10^{-2,38}}{0,10} = 0,042 < 1 \Rightarrow \boxed{\tau = 4,2 \%}$

On déduit que la réaction est limitée.

3-2- La valeur du rapport $\frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}}$:

D'après le tableau d'avancement : $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}} = [\text{HCOO}^-]_{\text{éq}} = \frac{x_{\text{éq}}}{V} = 10^{-\text{pH}}$

$$[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}} = \frac{C_A \cdot V - x_{\text{éq}}}{V} = C_A - \frac{x_{\text{éq}}}{V} = C_A - 10^{-\text{pH}}$$

$$\boxed{\frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}} = \frac{10^{-\text{pH}}}{C_A - 10^{-\text{pH}}}} \Rightarrow \boxed{\frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}} = \frac{10^{-2,38}}{0,10 - 10^{-2,38}}} \Rightarrow \boxed{\frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}} = 4,4 \cdot 10^{-2}}$$

3-3- La vérification de la valeur du pK_{A1} :

$$\text{pH} = \text{pK}_{A1} + \log \frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}} \Rightarrow \boxed{\text{pK}_{A1} = \text{pH} - \log \frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}}}$$

A.N : $\text{pK}_{A1} = 2,38 - \log(4,2 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow \boxed{\text{pK}_{A1} = 3,74}$

4- Expression du pH en fonction de pK_{A1} et pK_{A2} :

Pour le couple $\text{HCOOH}/\text{HCOO}^-$: $\text{pH} = pK_{A1} + \log \frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}}$

Pour le couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$: $\text{pH} = pK_{A2} + \log \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{éq}}}$

Le tableau de variation de la réaction de HCOOH et CH_3COO^- :

Equation de la réaction	$\text{HCOOH}_{(\text{aq})} + \text{CH}_3\text{COO}^-_{(\text{aq})} \rightleftharpoons \text{HCOO}^-_{(\text{aq})} + \text{CH}_3\text{COO}^-_{(\text{aq})}$				
Etat initial	$C_1 \cdot V_1$	$C_1 \cdot V_1$	—	0	0
Etat d'équilibre	$C_1 \cdot V_1 - x_{\text{éq}}$	$C_1 \cdot V_1 - x_{\text{éq}}$	—	$x_{\text{éq}}$	$x_{\text{éq}}$

$$[\text{HCOOH}]_{\text{éq}} = [\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{éq}} = \frac{C_1 \cdot V_1 - x_{\text{éq}}}{V} ; [\text{HCOO}^-]_{\text{éq}} = [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{éq}} = \frac{x_{\text{éq}}}{V}$$

$$\text{pH} = pK_{A1} + \log \frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}} \Rightarrow \log \frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}} = \text{pH} - pK_{A1}$$

$$\text{pH} = pK_{A2} + \log \frac{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}}{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}} = pK_{A2} - \log \frac{[\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}}$$

$$\text{pH} = pK_{A2} - (\text{pH} - pK_{A1}) \Rightarrow 2\text{pH} = pK_{A1} + pK_{A2} \Rightarrow \boxed{\text{pH} = \frac{pK_{A1} + pK_{A2}}{2}}$$

- Déduction de la valeur du pK_{A2} :

$$\text{pH} = \frac{pK_{A1} + pK_{A2}}{2} \Rightarrow pK_{A1} + pK_{A2} = 2\text{pH} \Rightarrow \boxed{pK_{A2} = 2\text{pH} - pK_{A1}}$$

$$pK_{A2} = 2 \times 4,25 - 3,74 \Rightarrow \boxed{pK_{A2} = 4,76}$$

Exercice 2 : Ondes (2,5 points)- Transformation nucléaires (2,25 points)

I- Propagation des ondes mécaniques et des ondes électromécaniques

1-Le nombre d'affirmations justes : 1

2-1- L'affirmation juste est :

Lors de la diffraction d'une onde mécanique progressive périodique, sa fréquence ne change pas.

2-2- Le son émis par un haut-parleur est une onde :

Mécanique longitudinale.

3-1- le schéma du montage de diffraction :

Voir schéma ci-contre :

3-2- La valeur de a :

D'après la figure on a :

$$\tan\theta = \frac{\ell_1}{2D}$$

$$\tan\theta \approx \theta \Rightarrow \theta = \frac{\ell_1}{2D}$$

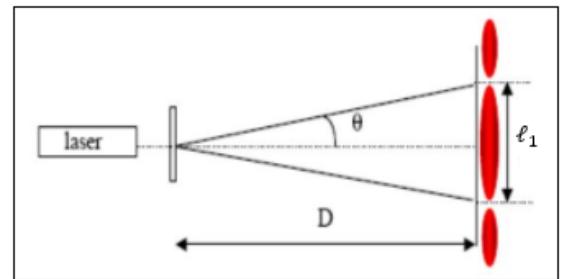
On a :

$$\theta = \frac{\lambda_1}{a}$$

$$\frac{\ell_1}{2D} = \frac{\lambda_1}{a}$$

$$c = \lambda_1 \cdot f_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{c}{f_1}$$

$$a = \frac{2D \cdot c}{\ell_1 \cdot f_1}$$



A.N :

$$a = \frac{2 \times 1,6 \times 3,10^8}{8,10^{-2} \times 4,76 \cdot 10^{14}} = 2,52 \cdot 10^{-5} \text{ m} \Rightarrow a = 25,2 \mu\text{m}$$

3-3-comment varie la largeur de la tache centrale ?

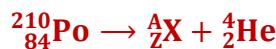
D'après la relation $\frac{\ell}{2D} = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \ell = \frac{2\lambda D}{a}$ puisque $D = \text{cte}$ et $a = \text{cte}$, plus que la valeur de λ augmente plus que la largeur ℓ de la fente centrale augmente.

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3,10^8}{4,76 \cdot 10^{14}} = 6,30 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 630 \text{ nm}$$

On remarque que $\lambda_2 = 450 \text{ nm} < \lambda_1$, donc la largeur de la tache centrale diminue.

II – L'activité du polonium

1- L'équation de désintégration de polonium 210 :



Lois de Soddy :

$$\begin{cases} 210 = A + 4 \\ 84 = Z + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 206 \\ Z = 82 \end{cases} \Rightarrow {}_Z^A\text{X} = {}_{82}^{206}\text{Pb}$$



2-1- Calcul de l'énergie $|E_1|$:

$$E_1 = [m(^{206}_{82}\text{Pb}) + m(^4_2\text{He}) - m(^{210}_{84}\text{Po})] \cdot c^2$$

$$E_1 = (205,930 + 4,00151 - 209,9374) \text{u} \cdot c^2 = -0,00589 \text{ u} \cdot c^2$$

$$E_1 = -0,00589 \times 931,5 \text{MeV} \cdot c^{-2} \cdot c^2 = -5,487 \text{ MeV}$$

$$|E_1| \approx 5,49 \text{MeV}$$

2-2-Déduction de l'énergie $|E_1|$:

$$N = \frac{m}{m(^{210}_{84}\text{Po})} \quad (1)$$

$$|E_2| = N \cdot |E_1| \Rightarrow |E_2| = \frac{m}{m(^{210}_{84}\text{Po})} \cdot |E_1|$$

A.N :

$$|E_2| = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{209,9374 \times 1,6605 \cdot 10^{-27}} \times 5,49 \times 1,6 \cdot 10^{-13} \Rightarrow |E_2| \approx 2,52 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

3- Détermination de $t_{1/2}$:

La loi de décroissance radioactive : $a = a_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow \frac{a}{a_0} = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow -\lambda \cdot t = \log\left(\frac{a}{a_0}\right)$

$$\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t = -\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \Rightarrow t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)} \cdot \Delta t$$

A.N :

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{95}{100}\right)} \times \left(245 + \frac{37}{60}\right) \times \frac{1}{24} \Rightarrow t_{1/2} = 138,3 \text{ jours}$$

4- Calcul de la masse maximal m_{\max} :

D'après la relation (1) :

$$N = \frac{m}{m(^{210}_{84}\text{Po})} \quad \text{et} \quad N_{\max} = \frac{m_{\max}}{m(^{210}_{84}\text{Po})}$$

$$a_{\max} = \lambda \cdot N_{\max} \Rightarrow a_{\max} = \lambda \cdot \frac{m_{\max}}{m(^{210}_{84}\text{Po})} \Rightarrow m_{\max} = \frac{a_{\max} \cdot m(^{210}_{84}\text{Po})}{\lambda}$$

$$m_{\max} = \frac{a_{\max} \cdot m(^{210}_{84}\text{Po})}{\ln 2} \cdot t_{1/2}$$

A.N :

$$m_{\max} = \frac{740 \times 209,9374 \times 1,6605 \cdot 10^{-27} \times 10^3 \times 138,3 \times 24 \times 3600}{\ln 2} \Rightarrow m_{\max} = 4,45 \cdot 10^{-9} \text{ g}$$

Exercice 3 : Electricité (5,5 points)

Partie I :

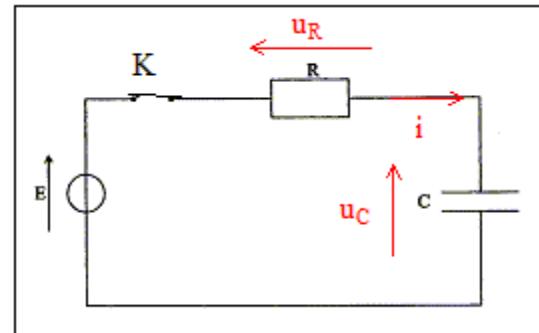
1-Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension ascendant

1-1-1- L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$:

Loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = E$

$$R \cdot i + u_C = E \Rightarrow \frac{d(R \cdot i)}{dt} + \frac{C}{C} \frac{du_C}{dt} = 0 \Rightarrow R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0$$

$R \cdot C \frac{di}{dt} + i = 0$



1-1-2- L'expression de $i(t)$:

$$i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On remplace dans l'équation différentielle :

$$-R \cdot C \cdot \frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-R \cdot C \cdot \frac{1}{\tau} + 1 \right) = 0$$

$$-R \cdot C \cdot \frac{1}{\tau} + 1 = 0 \Rightarrow \tau = R \cdot C$$

On détermine A en utilisant les conditions initiales :

$$u_R(0) + u_C(0) = E \Rightarrow R \cdot i(0) + u_C(0) = E$$

$$u_C(0) = 0 \Rightarrow i(0) = \frac{E}{R}$$

$$\begin{cases} i(t) = A \cdot e^0 \\ i(0) = \frac{E}{R} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{E}{R}$$

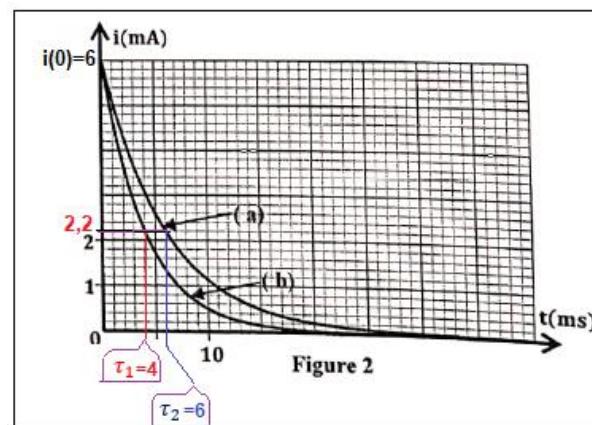
$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

1-2-1- La courbe de capacité C_1 :

On a : $\tau = R \cdot C$ plus que la valeur de C augmente plus que celle de τ augmente.

On a : $C_2 > C_1 \Rightarrow \tau_2 > \tau_1$ la courbe (b) correspond à C_1 .

1-2-2- Montrons que $i = 2,2$ mA à $t = \tau$:



$$i(\tau) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}} \Rightarrow i(\tau) = i(0) \cdot e^{-1}$$

Graphiquement $i(0) = 6 \text{ mA}$

$$i(\tau) = 6e^{-1} \Rightarrow i(\tau) = 2,2 \text{ mA}$$

1-2-3- montrons que $C_1 = 4 \mu\text{F}$:

$$C_e = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_e - C_2$$

D'après la courbe (b) $\tau_2 = 6 \text{ ms}$ avec $\tau_2 = R \cdot C_2$

D'après la courbe (a) $\tau_1 = 4 \text{ ms}$ avec $\tau_1 = R \cdot C_1$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R \cdot C_2}{R \cdot C_1} \Rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow C_2 = \frac{6}{4} \cdot C_1 = \frac{3}{2} C_1$$

$$C_e = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 + \frac{3}{2} C_1 = C_e \Rightarrow \frac{5}{2} C_1 = C_e \Rightarrow C_1 = \frac{2}{5} \cdot C_e \Rightarrow C_1 = \frac{2}{5} \times 10 \Rightarrow C_1 = 4 \mu\text{F}$$

1-2- La valeur de R et E :

$$\tau_1 = R \cdot C_1 \Rightarrow R = \frac{\tau_1}{C_1} \quad \text{A. N : } R = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow R = 10^3 \Omega$$

$$i(0) = \frac{E}{R} \Rightarrow E = i(0) \cdot R \quad \text{A. N : } E = 6 \cdot 10^{-3} \times 10^3 \Rightarrow E = 6 \text{ V}$$

2- Décharge d'un condensateur dans une bobine

2-1- L'équation différentielle vérifiée par u_{R_1} :

D'après la loi d'additivité des tensions :

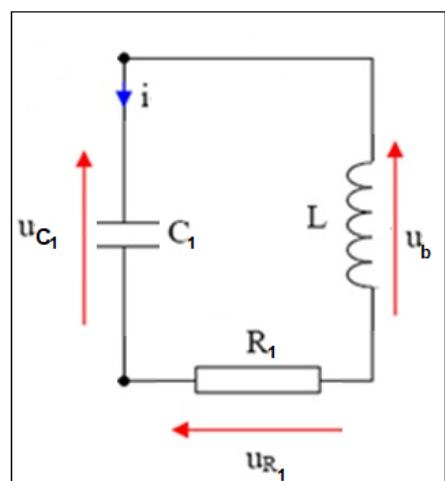
$$u_b + u_{R_1} + u_{C_1} = 0 \Rightarrow \frac{du_b}{dt} + \frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{du_{C_1}}{dt} = 0$$

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot i = 0$$

$$\text{Loi d'ohm : } u_{R_1} = R_1 \cdot i \Rightarrow i = \frac{1}{R_1} \cdot u_{R_1}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d^2 \left(\frac{1}{R_1} \cdot u_{R_1} \right)}{dt^2} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d^2 u_{R_1}}{dt^2}$$

$$\frac{L}{R_1} \cdot \frac{d^2 u_{R_1}}{dt^2} + \frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot u_{R_1} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_{R_1}}{dt^2} + \frac{R_1}{L} \frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{1}{L \cdot C_1} \cdot u_{R_1} = 0$$



2-2- La valeur R_1 :

A $t=0$ on a :

$$u_b(0) + u_{R_1}(0) + u_{C_1}(0) = 0$$

$$u_{R_1}(0) = 0 \text{ et } u_{C_1}(0) = E \Rightarrow u_b(0) = -E$$

$$u_b = L \cdot \frac{di}{dt} = \frac{L}{R_1} \cdot \frac{du_{R_1}}{dt}$$

$$\frac{L}{R_1} \cdot \frac{du_{R_1}}{dt} = -E \Rightarrow R_1 = -\frac{L}{E} \cdot \frac{du_{R_1}}{dt}$$

$$R_1 = -\frac{0,1}{6} \cdot \left(\frac{0 + 0,2}{0 - 0,5 \cdot 10^{-3}} \right) \Rightarrow R_1 = 6,67 \Omega$$

Partie II : Etude d'un signal modulé en amplitude

1- La valeur de N_1 et N_2 :

$$N_1 = F - f \Rightarrow N_1 = 10^5 - 10^3 \Rightarrow N_1 = 9,9 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$N_2 = F + f \Rightarrow N_2 = 10^5 + 10^3 \Rightarrow N_2 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

2- Expression du taux de modulation m :

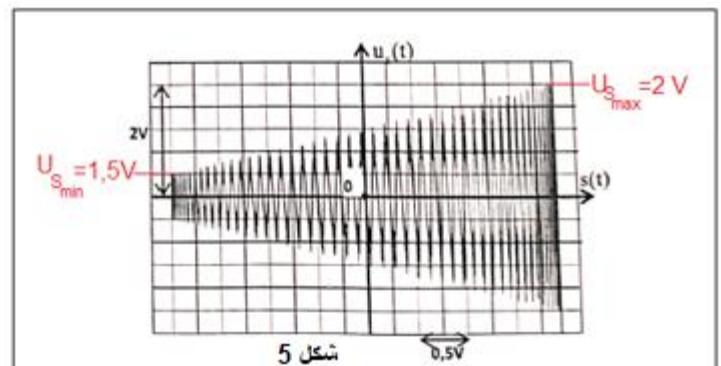
$$m = \frac{S_m}{U_0}$$

3-1- La détermination graphique de τ :

$$m = \frac{U_{S_{\max}} - U_{S_{\min}}}{U_{S_{\max}} + U_{S_{\min}}}$$

$$U_{S_{\min}} = 0,5 \text{ V} \quad \text{et} \quad U_{S_{\max}} = 2 \text{ V}$$

$$m = \frac{2 - 0,5}{2 + 0,5} = \frac{2}{3} \Rightarrow m \approx 0,67$$



3-2- Les valeurs des tensions U_0 et U_m :

D'après la figure 5 :

$$S_m = 2 \text{ V}$$

$$m = \frac{S_m}{U_0} \Rightarrow U_0 = \frac{S_m}{m}$$

$$U_0 = \frac{2}{\frac{2}{3}} \Rightarrow U_0 = 3 \text{ V}$$

$$U_{S_{\max}} = A(m + 1) \Rightarrow K \cdot U_0 \cdot U_m(m + 1) = U_{S_{\max}}$$

$$U_m = \frac{U_{S_{\max}}}{K \cdot U_0(m+1)} \Rightarrow U_m = \frac{2}{0,1 \times 3 \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)} \Rightarrow U_m = 4 \text{ V}$$

Exercice 4 : Mécanique (3,25 points)

Partie I : Mouvement de chute verticale d'une bille dans un liquide visqueux

1- L'équation différentielle :

Système étudié : {la bille}

Bilan des forces :

\vec{P} : Le poids ;

\vec{F} : La poussée d'Archimède ;

\vec{f} : La force de frottement fluide.

Application de la deuxième loi de Newton dans un repère lié à terre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$$

Projection sur l'axe Oz :

$$\begin{aligned} P - F - f &= m \cdot a_z \Leftrightarrow \rho_s \cdot V \cdot g - \rho_\ell \cdot V \cdot g - 6\pi\eta \cdot r \cdot v = \rho_s \cdot V \cdot \frac{d v}{dt} \\ \frac{d v}{dt} + \frac{6\pi\eta \cdot r}{\rho_s \cdot V} \cdot v &= \left(\frac{\rho_s \cdot V}{\rho_s \cdot V} - \frac{\rho_\ell \cdot V}{\rho_s \cdot V} \right) \cdot g \Rightarrow \frac{d v}{dt} + \frac{6\pi\eta \cdot r}{\rho_s \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3} \cdot v = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right) \cdot g \\ \frac{d v}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_s \cdot r^2} \cdot v &= \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right) \cdot g \end{aligned}$$

On pose :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{9\eta}{2\rho_s \cdot r^2} \Rightarrow \tau = \frac{2\rho_s \cdot r^2}{9\eta}$$

$$\frac{d v}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot v = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right) \cdot g$$

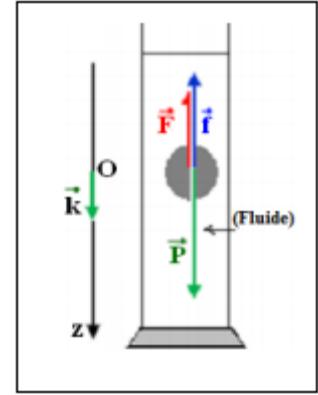
2- L'expression de la vitesse limite :

Quand la bille atteint sa vitesse limite, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{1}{\tau} \cdot v_{lim} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right) \cdot g \Rightarrow \frac{9\eta}{2\rho_s \cdot r^2} \cdot v_{lim} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right) \cdot g \Rightarrow \eta = \frac{2\rho_s \cdot r^2 \cdot g}{9 \cdot v_{lim}} \cdot \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right)$$

A.N :

$$\eta = \frac{2 \times 4490 \times (6,3 \cdot 10^{-3})^2 \times 9,81}{9 \times 1} \cdot \left(1 - \frac{860}{4490} \right) \Rightarrow \eta = 0,314 \text{ Pa.s}$$



3- Calcul de $z(t)$ à $t = 7\tau$:

On a :

$$z(t) = v_{\ell im} \left[t + \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \right]$$

$$z(7\tau) = v_{\ell im} \left[7\tau + \tau \left(e^{-\frac{7\tau}{\tau}} - 1 \right) \right] \Rightarrow z(7\tau) = \tau \cdot v_{\ell im} [7 + (e^{-1} - 1)]$$

$$\frac{1}{\tau} \cdot v_{\ell im} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right) \cdot g \Rightarrow \tau = \frac{v_{\ell im}}{\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right) \cdot g}$$

$$z(7\tau) = \tau \cdot v_{\ell im} [7 + (e^{-1} - 1)] \Rightarrow \boxed{z(7\tau) = \frac{v_{\ell im}^2}{\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_s} \right) \cdot g} \cdot [7 + (e^{-1} - 1)]}$$

A.N : $z(7\tau) = \frac{1^2}{\left(1 - \frac{860}{4490} \right) \times 9,81} \cdot [7 + (e^{-1} - 1)] = 0,803 \text{ m} \Rightarrow \boxed{z(7\tau) = 80,3 \text{ cm}}$

Explication :

A $t = \tau$ la bille atteint sa vitesse limite sa cote est $z(7\tau) = 80,3 \text{ cm}$

On a : $z(7\tau) < h$, donc la bille atteint sa vitesse limite avant d'arriver au fond du tube.

Ce tube est convenable pour la mesure expérimentale de $v_{\ell im}$.

Partie II : Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

1- L'équation différentielle :

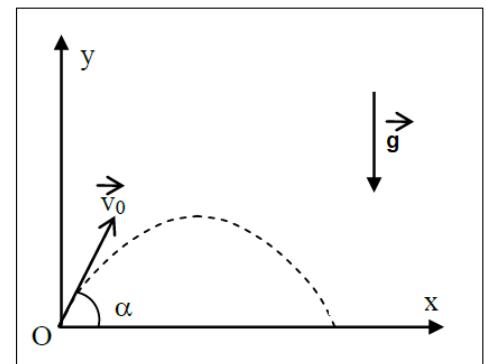
- ❖ Système étudié : {la projectile}
- ❖ Bilan des forces :

\vec{P} : Le poids ;

- ❖ Application de la deuxième loi de Newton dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ lié à terre supposé galiléen :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \Leftrightarrow m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

- ❖ Projection sur l'axe Ox et Oy :



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{d v_x}{dt} \\ a_y = \frac{d v_y}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{Intégration}} \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g \cdot t + C_2 \end{cases}$$

D'après les conditions initiales :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} C_1 = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha \\ C_2 = v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha \end{cases} ; \quad \overrightarrow{OG_0} \begin{cases} C_3 = x_0 = 0 \\ C_4 = y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin\alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{Intégration}} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + C_3 \\ y(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + C_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t \end{cases}$$

2-L'équation de la trajectoire :

On élimine le temps des deux équations horaires $x(t)$ et $y(t)$:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

$$y = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \right)^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \right) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan\alpha}$$

3-1- Les valeurs des angles α pour atteindre la cible A :

$$y_1 = -\frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x_1^2 + x_1 \cdot \tan\alpha$$

$$100 = -\frac{10}{2 \times 100^2} \times 400^2 \times \frac{1}{\cos^2\alpha} + 400 \tan\alpha \Rightarrow -80(1 + \tan^2\alpha) + 400 \tan\alpha - 100 = 0$$

$$\tan^2\alpha - 5 \tan\alpha + 2,25 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5^2 - 4 \times 2,25} = 4$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{5 - 4}{2} = 0,5 \Rightarrow \alpha_1 = \tan^{-1}(0,5) \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 26,56^\circ}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{5 + 4}{2} = 4,5 \Rightarrow \alpha_2 = \tan^{-1}(4,5) \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 77,47^\circ}$$

3-2- L'équation de la courbe (C):

D'après l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan\alpha = -\frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2} \cdot (1 + \tan^2\alpha) + x \cdot \tan\alpha$$

$$y = -\frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2} \cdot \tan^2\alpha + x \cdot \tan\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2}$$

$$\frac{dy}{d \tan\alpha} = -\left(\frac{g \cdot x}{v_0^2} \cdot \tan\alpha + 1 \right) x = 0 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{v_0^2}{g \cdot x}$$

On remplace $\tan \alpha$ dans l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2} \cdot \left(\frac{v_0^2}{g \cdot x} \right)^2 + \frac{v_0^2}{g \cdot x} - \frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2} = -\frac{g \cdot x^2 \cdot v_0^4}{2 v_0^2 \cdot g^2 \cdot x^2} + \frac{v_0^2}{g} - \frac{g}{2 v_0^2} \cdot x^2$$

$$y = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} - \frac{g}{2 v_0^2} \cdot x^2 \Rightarrow y(x) = -\frac{g}{2 v_0^2} \cdot x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

www.svt-assilah.com