

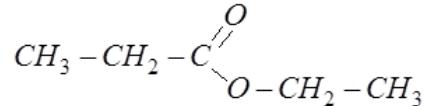
- Chimie -

Partie I :

1- Etude de l'hydrolyse d'un ester :

1-1-1- * Formule semi-développée de l'ester E :

*** Son nom :** propanoate d'éthyle



1-1-2- Détermination de la masse de l'acide formé à l'équilibre chimique :

- La constante de l'équilibre est : $K = \frac{[\text{acide}]_{\text{éq}} \times [\text{alcool}]_{\text{éq}}}{[\text{ester}]_{\text{éq}} \times [\text{eau}]_{\text{éq}}}$ avec $[X] = \frac{n(X)}{V_{\text{sol}}}$

- En se servant du tableau d'avancement de l'hydrolyse :

Equation de la réaction		$\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH} + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$			
Etat du système	Avancement $x(\text{mol})$	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	0,1	0,1	0	0
Etat intermédiaire	X	$0,1 - x$	$0,1 - x$	x	x
Etat équivalence	$x_{\text{éq}}$	$0,1 - x_{\text{éq}}$	$0,1 - x_{\text{éq}}$	$x_{\text{éq}}$	$x_{\text{éq}}$

On écrit : $K = \frac{x_{\text{éq}}^2}{(0,1 - x_{\text{éq}})^2}$; on obtient : $x_{\text{éq}} = \frac{0,1 \times \sqrt{K}}{\sqrt{K} - 1}$ ou $x_{\text{éq}} = \frac{0,1 \times \sqrt{K}}{\sqrt{K} + 1}$ (avec $0 < x_{\text{éq}} < 0,1 \text{ mol}$)

On retient la solution convenable : $x_{\text{éq}} = \frac{0,1 \times \sqrt{K}}{\sqrt{K} + 1} = \frac{0,1 \times \sqrt{0,25}}{\sqrt{0,25} + 1} \approx 0,033 \text{ mol}$

- La masse de l'acide formé à l'équilibre est : $m = x_{\text{éq}} \cdot M(\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}) \approx 0,333 \times 74 \approx 2,44 \text{ g}$

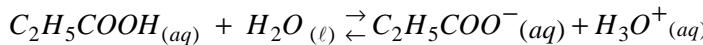
1-2-1- Equation de la réaction : $\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5 + \text{HO}^- \rightleftharpoons \text{C}_2\text{H}_5\text{COO}^- + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$

1-2-2- Rendement de cette réaction :

$$r = \frac{n_{\text{exp}}(\text{alcool})}{n_{\text{théorique}}(\text{alcool})} = \frac{\frac{m_{\text{exp}}}{M(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH})}}{\frac{m_0}{M(\text{E})}} , \text{ ou bien : } r = \frac{m_{\text{exp}}}{m_0} \times \frac{M(\text{E})}{M(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH})} \quad \text{A.N : } r = \frac{4,2}{10,2} \times \frac{102}{46} = 0,91 = 91\%$$

2- Etude d'une solution d'acide propanoïque :

2-1-1- Equation chimique de la réaction entre l'acide propanoïque et l'eau :



2-1-2- Expression du pK_A :

D'après le cours on a la relation suivante : $\text{pH} = \text{pK}_A + \log \left(\frac{[\text{C}_2\text{H}_5\text{COO}^-]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}]} \right)$.

2-1-3-Taux d'avancement final τ : On a : $\tau = \frac{x_f}{x_m} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C}$; ou bien

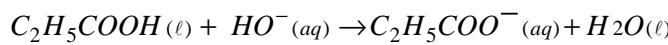
$$\tau = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}] + [\text{C}_2\text{H}_5\text{COO}^-]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}] + [\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{1}{1 + \frac{[\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}]}{[\text{H}_3\text{O}^+]}} \quad (*)$$

Or d'après le résultat : $pH = pK_A + \log\left(\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}\right)$; alors : $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} = 10^{pK_A - pH}$ (**)

On remplace (**) dans (*), on aura l'expression : $\tau = \frac{1}{1 + 10^{pK_A - pH}}$

A.N : $\tau = \frac{1}{1 + 10^{4,9-2,9}} \approx \frac{1}{1 + 10^{2,0}} \approx 9,9 \cdot 10^{-3} \approx 1\%$

2-2-1- Equation chimique de la réaction du dosage :



2-2-2-Recherche de l'expression du rapport : $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}$

- Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$C_2H_5COOH(\ell) + HO^-(aq) \rightarrow C_2H_5COO^-(aq) + H_2O(\ell)$			
Etat du système	Avancement $x(\text{mol})$	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$C_A \cdot V_A$	$C_B \cdot V_B$	0	0
Etat intermédiaire	x	$C_A \cdot V_A - x$	$C_B \cdot V_B - x$	x	x
Etat équivalence	x_E	$C_A \cdot V_A - x_E$	$C_B \cdot V_B - x_E$	x_E	x_E

- Avant l'équivalence $V_B < V_{B,E}$, le réactif limitant est $HO^-(aq)$: $n(HO^-) = C_B V_B - x = 0 \Rightarrow x = C_B V_B$

- D'après le tableau : $[C_2H_5COO^-] = \frac{x}{V_A + V_B}$ et $[C_2H_5COOH] = \frac{C_A V_A - x}{V_A + V_B}$

Et le rapport s'écrira : $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} = \frac{C_B V_B}{C_A V_A - C_B V_B}$

Or au point d'équivalence, la relation qui se réalise est : $C_A V_A = C_B V_{B,E}$

- L'expression finale est : $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} = \frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}$

2-2-2- Vérification du pK_A du couple $C_2H_5COOH / C_2H_5COO^-$:

- La fonction $pH = \log\left(\frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}\right)$ est affine d'équation $pH = a \cdot \log\left(\frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}\right) + b$ (1)

Où b représente l'ordonnée à l'origine, et graphiquement il vaut : $b \approx 4,9$

- En comparant la relation (1) avec celle donnée à la réponse de la question 2-1-2-

$pH = \log\left(\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}\right) + pK_A$; On déduit alors $pK_A \approx 4,9$

Partie II :

1- Le bon choix est : b) Le pôle positif de la pile est l'électrode de l'argent.

- Le quotient de réaction initial : $Q_{r,i} = \frac{[Cd^{2+}]_i}{[Ag^+]_i^2} = \frac{0,2}{0,4^2} = 1,25 \ll K = 5 \cdot 10^{40}$

- Le sens de la réaction spontanée est le sens direct \rightarrow ; donc il y aura oxydation du cadmium Cd qui est l'électrode anode ou pole négatif de cette pile.

2-1- Expression du quotient de la réaction :

$$Q_r = \frac{[Cd^{2+}]_{(t)}}{[Ag^+]_{(t)}^2} = \frac{\frac{C_2 \cdot V + x}{V}}{\left(\frac{C_1 \cdot V - 2 \cdot x}{V}\right)^2} = \frac{C_2 \cdot V^2 + V \cdot x}{(C_1 \cdot V - 2 \cdot x)^2}$$

A.N : $Q_r = \frac{1,25 \cdot 10^{-2} + 0,25 \cdot x}{(0,1 - 2 \cdot x)^2}$

2-2- Calcul du quotient de la réaction à t = 10h :

- Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		Quantités de matière (mol)				Quantité de matière des e^- échangés :
Etats du système	Avancement x (mol)	$2Ag^{+}_{(aq)} + Cd_{(s)} \rightleftharpoons 2Ag_{(s)} + Cd^{2+}_{(aq)}$	$n_i(Cd)$	$n_i(Ag)$	$C_2 \cdot V$	
E. Initial	0	$C_1 \cdot V$	$n_i(Cd)$	$n_i(Ag)$	$C_2 \cdot V$	0
E. Intermédiaire	x	$C_1 \cdot V - 2 \cdot x$	$n_i(Cd) - x$	$n_i(Ag) + 2 \cdot x$	$C_2 \cdot V + x$	$n(e^-) = 2 \cdot x$
E. Final	x_{max}	$C_1 \cdot V - 2 \cdot x_{max}$	$n_i(Cd) - x_{max}$	$n_i(Ag) + 2 \cdot x_{max}$	$C_2 \cdot V + x_{max}$	$n(e^-) = 2 \cdot x_{max}$

- Cherchons l'avancement x à cet instant :

On a la quantité d'électricité Q transportée pendant Δt , par les porteurs de charges (les électrons dans le circuit extérieur de la pile) est : $Q = n(e^-) \cdot F = I \cdot \Delta t$ avec $n(e^-) = 2 \cdot x$ d'où :

$$x = \frac{I \cdot \Delta t}{2 \cdot F} = \frac{0,215 \times 10 \times 3600}{2 \times 9,65 \cdot 10^4} \approx 0,04 \text{ mol}$$

$$- \text{ A.N : } Q_r = \frac{1,25 \cdot 10^{-2} + 0,25 \cdot 0,04}{(0,1 - 2 \times 0,04)^2} \approx 56,25$$

2-3- Calcul de la variation $|\Delta m|$:

- Quand la pile sera usée, les ions Ag^+ disparaissent totalement (Cd est en excès) :

$$n_f(Ag^+) = C_1 \cdot V - 2 \cdot x_{max} = 0 ; \text{ c.à.d } x_{max} = \frac{C_1 \cdot V}{2}$$

- La variation de masse : $|\Delta m| = |\Delta n(Cd)| \times M(Cd)$ ou bien $|\Delta m| = |n_f(Cd) - n_i(Cd)| \times M(Cd)$

Ce qui donne $|\Delta m| = |(n_i(Cd) - x_{max}) - n_i(Cd)| \times M(Cd) = x_{max} \times M(Cd)$

$$\text{Finalement : } |\Delta m| = \frac{C_1 \cdot V}{2} \times M(Cd) \quad \text{A.N : } |\Delta m| = \frac{0,4 \times 0,25}{2} \times 112,4 = 5,62 \text{ g}$$

- Physique -

LES TRANSFORMATIONS NUCLEAIRES :

1- Le bon choix est : c) D'après la courbe d'Aston, pour les noyaux lourds, le degré de stabilisation diminue lorsque la masse du noyau augmente.

2-Définition : La radioactivité β^- est une réaction spontanée au cours de laquelle un noyau instable se désintègre en un nouveau noyau plus stable, en émettant des électrons (notés β^-).

3- Calcul de l'énergie libérée $|\Delta E|$:

L'équation de désintégration est : $^{60}_{27}Co \rightarrow ^{60}_{28}X + ^0_1e$

On a : $|\Delta E| = |E_\ell(^{60}_{27}Co) - E_\ell(^{60}_{28}X)|$; or $E_\ell(^{60}_{27}Co) = (27 \cdot m(^1_1p) + (60 - 27) \cdot m(^1_0n) - m(^{60}_{27}Co))c^2$ (2)

De la relation (2), on calcule d'abord $E_\ell(^{60}_{27}Co)$:

$$E_\ell(^{60}_{27}Co) = (27 \times 1,00728 + 33 \times 1,00866 - 59,8523) \cdot u \times c^2 \approx 0,63 \times 931,949 \text{ MeV} \approx 586,841 \text{ MeV}$$

A.N : $|\Delta E| = |586,841 - 588,387| \approx 1,55 \text{ MeV}$

4- Montrons la relation $t_1 = \tau \cdot \ln \left(\frac{N_A \cdot m_0}{\tau \cdot M \cdot a_1} \right)$:

- On sait que, d'après la loi de désintégration, l'activité : $a(t_1) = a_0 e^{-\lambda \cdot t_1}$ avec $a_0 = \lambda \cdot N_0 = \lambda \cdot N_A \cdot \frac{m_0}{M}$

On combine ces relations, on obtient : $a_1 = \frac{\lambda \cdot N_A \cdot m_0}{M} \cdot e^{-\lambda \cdot t_1}$ ou bien $\frac{M \cdot a_1}{\lambda \cdot N_A \cdot m_0} = e^{-\lambda \cdot t_1}$

Sachant que $\tau = \frac{1}{\lambda}$; donc : $\frac{\tau \cdot M \cdot a_1}{N_A \cdot m_0} = e^{-t_1 / \tau}$ alors $\ln \left(e^{-t_1 / \tau} \right) = \ln \left(\frac{N_A \cdot m_0}{\tau \cdot M \cdot a_1} \right)$

Finalement : $t_1 = \tau \cdot \ln \left(\frac{N_A \cdot m_0}{\tau \cdot M \cdot a_1} \right)$ A.N : $t_1 = \frac{2,8 \cdot 10^3}{365,25} \times \ln \left(\frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 50 \cdot 10^{-3}}{2,8 \cdot 10^3 \times 24 \times 3600 \times 60 \times 5,18 \cdot 10^{11}} \right) \approx 10,63 \text{ ans}$

L'ELECTRICITE :

I - La Charge et la décharge d'un condensateur :

1- Charge d'un condensateur :

1-1- Equation différentielle que vérifie l'intensité $i(t)$:

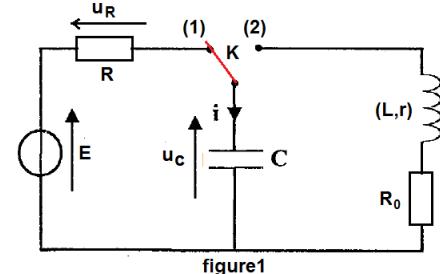
D'après la figure ci-contre : $u_R + u_C = E$ (1)

En respectant les conventions : $u_C = \frac{q}{C}$ et $u_R = R \cdot i$

La relation (1) devient : $R \cdot i + \frac{q}{C} = E$ (2) et $E = Cte$

En dérivant la relation (2), on aura : $R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0$ avec $i = \frac{dq}{dt}$

Finalement l'équation différentielle : $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot i = 0$



1-2- Détermination de R :

- Graphiquement la constante du temps est : $\tau = 1ms = 10^{-3} s$

- La constante du temps $\tau = RC$ donne : $R = \frac{\tau}{C}$ A.N : $R = \frac{10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 400 \Omega$

1-3- Détermination de U_0 :

- A $t = 0$; graphiquement : $i(0) = 10mA = 10^{-2} A$

- A $t = 0$; l'équation différentielle devient : $u_R(0) + u_C(0) = E$; qui peut s'écrire : $R \cdot i(0) + U_0 = E$

D'où : $U_0 = E - R \cdot i(0)$ A.N : $U_0 = 8 - 400 \times 10^{-2} = 4V$

1-4- * Recherche de l'expression de l'énergie électrique emmagasinée entre $t=0$ et $t=\infty$:

On a : $E_{el} = E_{el}(t \rightarrow \infty) - E_{el}(t=0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(\underbrace{u_c(t_\infty)}_{=E} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$ ce qui donne : $E_{el} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (E^2 - U_0^2)$

$$A.N : E_{el} = \frac{1}{2} \times 2,5 \cdot 10^{-6} \times (8^2 - 4^2) = 6 \cdot 10^{-5} J = 60 \mu J$$

2- Oscillations libres dans le circuit RLC :

2-1- Recherche de l'expression de l'énergie magnétique $E_m(t)$:

Soit une bobine de coefficient d'auto-inductance L , traversée par un courant d'intensité $i(t)$ à l'instant t , et la tension entre ses bornes est $u_L(t)$: la puissance instantanée est alors : $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

Dans la convention "récepteur" la tension s'écrit : $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$

$$\text{Donc } p(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \times i(t) = \frac{L}{2} \cdot \frac{d}{dt} (i^2(t)) \text{ ou bien } p(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) \right) \text{ (1)}$$

En comparant la relation (1) avec la relation suivante : $p(t) = \frac{d}{dt} (E_m(t))$

$$\text{On en déduit : } E_m(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

2-2- Recherche de l'expression $\frac{d}{dt} (E_{Tot}(t))$:

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC est : $E_{Tot}(t) = E_{el}(t) + E_m(t)$

$$\text{Ou bien } E_{Tot}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2(t) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

$$\text{- Dérivons cette expression } \frac{d}{dt} (E_{Tot}(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2(t) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) \right) = C \cdot u_c(t) \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\text{Or } u_c = \frac{q}{C} \text{ et } \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{i}{C} \text{ donc } \frac{d}{dt} (E_{Tot}(t)) = q(t) \cdot \frac{i(t)}{C} + L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} = i(t) \cdot \left(\frac{q(t)}{C} + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \right) \text{ (*)}$$

Et d'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_c + u_b + u_{R_0} = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R_0 \cdot i(t) = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -(r + R_0) \cdot i(t)$$

On remplace cette dernière expression dans la relation (*) : $\frac{d}{dt} (E_{Tot}(t)) = i(t) \cdot [-(r + R_0) \cdot i(t)]$

Finalement on aboutit à l'expression finale : $\frac{d E_{Tot}(t)}{dt} = -(r + R_0) \cdot i^2(t)$

2-3- Détermination de l'énergie dissipée $|\Delta E|$ entre $t=0$ et $t=t_1$:

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à $t = 0$ est :

$$E_{Tot}(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(\underbrace{u_c(0)}_{=E} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\underbrace{i(0)}_{=0} \right)^2 \Rightarrow E_{Tot}(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$$

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à $t = t_1$ est :

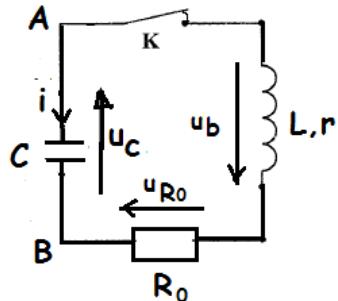
$$E_{Tot}(t_1) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2(t_1) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t_1) \text{ (*)}$$

- D'après la loi d'ohm : $u_{R_0}(t_1) = R_0 \cdot i(t_1) \Rightarrow i(t_1) = \frac{u_{R_0}(t_1)}{R_0}$ (1)

- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_c + u_b + u_{R_0} = 0 \Rightarrow u_c(t_1) + r \cdot i(t_1) + L \cdot \underbrace{\left(\frac{d i(t)}{dt} \right)_{t=t_1}}_{=0} + u_{R_0}(t_1) = 0$$

$$\Rightarrow u_c(t_1) = -r \cdot \frac{u_{R_0}(t_1)}{R_0} - u_{R_0}(t_1) \Rightarrow u_c(t_1) = -\left(\frac{r + R_0}{R_0} \right) u_{R_0}(t_1) \quad (2)$$



- On remplace (1) et (2) dans (*), on obtient :

$$E_{Tot}(t_1) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(-\left(\frac{r + R_0}{R_0} \right) u_{R_0}(t_1) \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{u_{R_0}(t_1)}{R_0} \right)^2 \Rightarrow E_{Tot}(t_1) = \frac{(u_{R_0}(t_1))^2}{2 \cdot R_0^2} \cdot (L + C \cdot (r + R_0)^2)$$

- Alors l'énergie dissipée $|\Delta E|$ entre $t=0$ et $t=t_1$: $|\Delta E| = |E_{Tot}(t_1) - E_{Tot}(t=0)|$

$$|\Delta E| = \left| \frac{(u_{R_0}(t_1))^2}{2 \cdot R_0^2} \cdot (L + C \cdot (r + R_0)^2) - \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \right| \Rightarrow |\Delta E| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{u_{R_0}^2}{R_0^2} \cdot (L + C \cdot (r + R_0)^2) - C \cdot E^2 \right|$$

$$A.N : |\Delta E| = \frac{1}{2} \times \left| \frac{0,44^2}{30^2} \times (0,5 + 2,5 \cdot 10^{-6} \times (7 + 30)^2) - 2,5 \cdot 10^{-6} \times 8^2 \right| \approx 2,59 \cdot 10^{-5} J \approx 26 \mu J$$

II - Oscillations forcées dans le circuit RLC :

1- Le bon choix est : d) Expression du facteur de qualité $Q = \frac{N_0}{\Delta N}$

a) Le GBF joue le rôle de l'excitateur, b) les oscillations étudiées sont forcées, et c) ϕ représente le déphasage entre la tension $u(t)$ et l'intensité du courant électrique $i(t)$.

2- Détermination de la valeur de U_m , L_0 et r_0 :

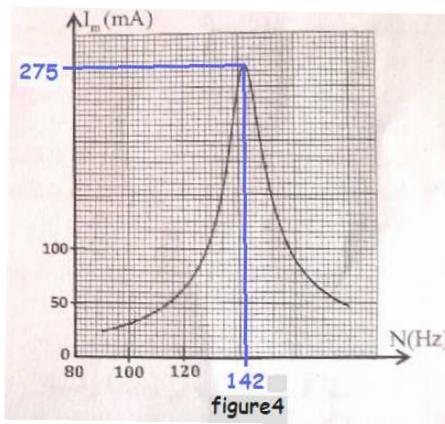


figure4

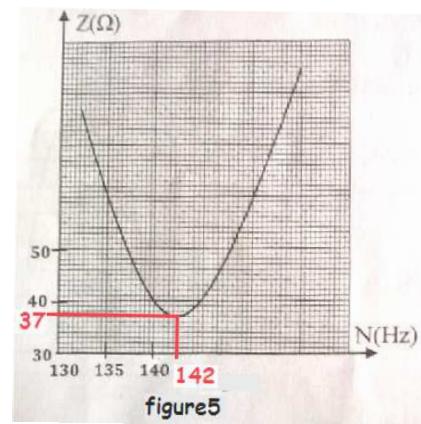


figure5

- Figure5 : à la résonance $Z = 37 \Omega$, et on sait que $Z = R_{Tot} = r_0 + R_0$

$$D'où : r_0 = Z - R_0 \quad A.N : r_0 = 37 - 30 = 7 \Omega$$

- Figure4 : à la résonance $I_m = 275 \text{ mA}$ et $N_0 = 142 \text{ Hz}$

$$* \text{ On sait que } U_m = Z \cdot I_m \quad A.N : U_m = 37 \times 0,275 \approx 10 \text{ V}$$

$$* \text{ On sait que } L_0 \cdot C \cdot (2 \cdot \pi \cdot N_0)^2 = 1 \text{ d'où } L_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot N_0^2 \cdot C} \quad A.N : L_0 = \frac{1}{4 \times 10 \times 142^2 \times 2,5 \cdot 10^{-6}} \approx 0,5 \text{ H}$$

3- Détermination de la puissance électrique moyenne consommée à la résonance :

A la résonance : $P = R_{\text{Tot}} \cdot I^2$ c'est la puissance consommée par les résistances du circuit.

Or $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ donc $P = \frac{1}{2} \cdot (r_0 + R_0) \cdot I_m^2$ A.N : $P = \frac{1}{2} \cdot (7 + 30) \cdot 0,275^2 \approx 1,4W$

LA MECANIQUE :

PARTIE I : Etude du mouvement d'un oscillateur (corps solide - ressort)

1- Etude du mouvement de l'oscillateur mécanique en position horizontale :

1-1- Equation différentielle du mouvement que vérifie l'abscisse $x(t)$:

- Système à étudier : {corps(S)}

- Repère d'étude R ($O ; \vec{i}$) supposé galiléen :

- Bilan des forces extérieures :

* Poids du corps (S) : \vec{P} ;

* Action du plan horizontal : \vec{R}

* Action du ressort : \vec{T}

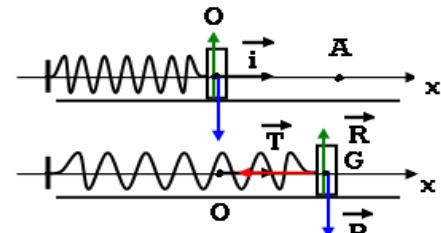
- La 2^{ème} loi de newton donne : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Ox : $P_x + R_x + T_x = m \cdot a_x$ (*)

- Expressions : $P_x = 0$, $R_x = 0$, $T_x = -T = -k \cdot x$ et $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$.

- La relation (*) devient : $0 + 0 - k \cdot x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$

- Finalement l'équation différentielle sera : $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$



1-2- Détermination de x_m et φ :

*** Détermination de x_m :**

- La solution de l'équation différentielle est de la forme : $x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

- Graphiquement (figure2) : $a_{\max} = 5 \text{ m.s}^{-2}$ et $T_0 = 0,4 \text{ s}$

- En dérivant successivement deux fois cette solution, on obtient l'expression de l'accélération de G le centre d'inertie du corps (S) :

$$a_x(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \text{ ou bien } a_x(t) = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \pi\right) = a_{\max} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \pi\right)$$

$$\text{Avec } a_{\max} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x_m \text{ alors } x_m = \frac{a_{\max} \cdot T_0^2}{4\pi^2} \text{ A.N : } x_m = \frac{5 \times 0,4^2}{4 \times 10} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

*** Détermination de φ :**

A $t=0$: graphiquement $a_x(0) = -a_{\max}$ et $a_x(0) = a_{\max} \cdot \cos(\varphi + \pi)$ alors $\cos(\varphi + \pi) = -1$
ou bien $-\cos(\varphi) = -1 \Rightarrow \cos(\varphi) = 1$; finalement : $\varphi = 0$

2- Etude du mouvement de l'oscillateur mécanique en position verticale :

2-1- Détermination de l'allongement $\Delta\ell_0 = \ell - \ell_0$:

A l'équilibre : $\vec{T}_0 + \vec{P} = \vec{0}$, et par projection sur l'axe vertical Oz, on aura :

$$T_{0z} + P = 0 \text{ alors } k \cdot \Delta\ell_0 + m \cdot g = 0 \text{ d'où } \Delta\ell_0 = -\frac{m \cdot g}{k}$$

2-2- Montrons que $E_p = A \cdot z^2 + B$

- L'énergie potentielle totale est : $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ (*)

- L'énergie potentielle de pesanteur est : $E_{pp} = -m \cdot g \cdot z + C$

Or en $z=0$ on a $E_{pp}=0$ donc $C=0$; d'où $E_{pp} = -m \cdot g \cdot z$ (1)

- L'énergie potentielle élastique est : $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2 + C'$

Or lorsque $\Delta\ell=0$ on a $E_{pe}=0$ donc $C'=0$; d'où $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2$ (2)

- On porte (1) et (2) dans (*), on aura :

$$E_p = -m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2, \text{ avec } \Delta\ell = \ell - \ell_0 \text{ et } z = \ell_{eq} - \ell$$

$$\text{On peut écrire : } \Delta\ell = \ell - \ell_0 = (\ell - \ell_{eq}) + (\ell_{eq} - \ell_0) = -z + \Delta\ell_0$$

$$\text{Donc } E_p = -m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (-z + \Delta\ell_0)^2 = -\underbrace{(m \cdot g + k \cdot \Delta\ell_0)}_{=0} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot z^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2$$

$$\text{Finalement on aboutit à l'expression : } E_p = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot k \cdot z^2}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2}_{B}$$

2-3-1- Déterminons k et $\Delta\ell_0$:

- La figure 4 nous permet d'avoir : $E_p(z=0)=40mJ$ et $E_p(z=2cm)=50mJ$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2 = E_p(z=0) \quad (1)$$

$$\text{soit le système : } \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot k \cdot z_m^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2 = E_p(z_m=2cm) \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Des relations (1) et (2) on peut écrire : } \frac{1}{2} \cdot k \cdot z_m^2 = E_p(z_m=2cm) - E_p(z=0)$$

$$\text{Donc : } k = \frac{2}{z_m^2} \times [E_p(z_m=2cm) - E_p(z=0)] \quad \text{A.N : } k = \frac{2}{0,02^2} \times [50 \cdot 10^{-3} - 40 \cdot 10^{-3}] = 50N.m^{-1}$$

$$\text{De la relation (1) : } \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2 = E_p(z=0) \text{ on déduit } \Delta\ell_0 = -\sqrt{\frac{2 \cdot E_p(z=0)}{k}}$$

$$\text{A.N : } \Delta\ell_0 = -\sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{50}} = -0,04m = -4cm$$

2-3-2- Détermination du travail de la force de rappel :

$$\text{On a } E_p = E_{pp} + E_{pe} \text{ alors } \Delta E_p = \Delta E_{pp} + \Delta E_{pe} \text{ or } \Delta E_{pp} = -\int_{z_1}^{z_2} W(\vec{P}) = -m \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \text{ et } \Delta E_{pe} = -\int_{z_1}^{z_2} W(\vec{T})$$

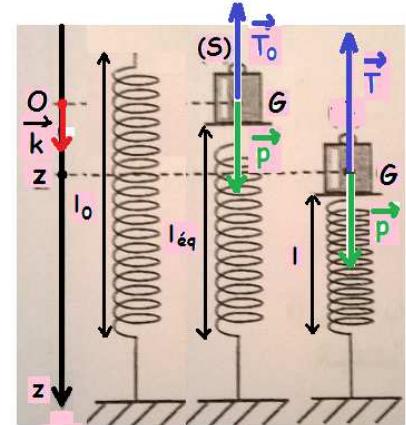


figure 3

Donc $\Delta E_p = -m.g.(z_2 - z_1) - \underset{z_1 \rightarrow z_2}{W}(\vec{T})$ d'où $\underset{z_1 \rightarrow z_2}{W}(\vec{T}) = -\Delta E_p - m.g.(z_2 - z_1)$ or $-m.g = k.\Delta\ell_0$

Finalement on arrive à l'expression : $\underset{z_1 \rightarrow z_2}{W}(\vec{T}) = -\Delta E_p + k.\Delta\ell_0.(z_2 - z_1)$

A.N : $\underset{z_1 \rightarrow z_2}{W}(\vec{T}) = -(50 - 45).10^{-3} + 50 \times (-4.10^{-2}) \times (1.4.10^{-2} - 0) = -3.3.10^{-2} J$

PARTIE II : Détermination du rayon de l'orbite de la lune autour de la terre

1- Définition :

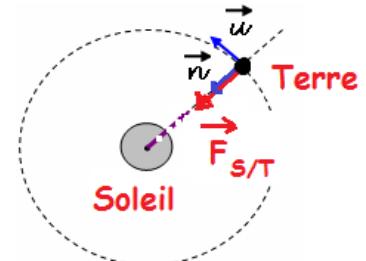
Le référentiel géocentrique est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines qui apparaissent fixes.

2- Le bon choix est : d) La vitesse d'une planète autour du soleil ne dépend pas de la masse de cette planète.

(a) Unité de la constante gravitationnelle $N.m^2.kg^{-2}$; b) Le vecteur accélération est radial mais non tangentiel ; c) Le vecteur accélération change de direction durant le mouvement circulaire uniforme).

3- Expression vectorielle de la force de gravitation :

Dans $(\vec{u}; \vec{n})$ on a : $\vec{F}_{S/T} = G \cdot \frac{m.M}{R^2} \cdot \vec{n}$



4- Le mouvement de la terre est circulaire uniforme :

- Système à étudier : {Terre (m)}

- Repère d'étude (S, \vec{i}, \vec{j}) supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures : $\vec{F}_{S/T}$

- La 2ème loi de Newton s'écrit : $\vec{F}_{S/T} = m \cdot \vec{a}_G$ ou bien $m \cdot \vec{a}_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \vec{n}$ alors $\vec{a}_G = G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot \vec{n}$

Ce qui prouve que le vecteur accélération est radial, et que sa composante tangentielle est nulle, $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$: On en déduit que la vitesse est constante ou le mouvement est uniforme.

D'autre part $a_N = a_G \Rightarrow \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M}{R^2} \Rightarrow R = \frac{G \cdot M}{v^2} = Cte$: On en déduit que le rayon est constant ou le mouvement est circulaire.

Finalement le mouvement de la terre par rapport au soleil est circulaire uniforme.

5- La troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = K = Cte$

Puisque le mouvement de la Terre par rapport au Soleil est circulaire uniforme de période T ;

alors : $T = \frac{2\pi R}{v}$ avec $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$; ce qui donne $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{G \cdot M}} = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G \cdot M}}$

Finalement la loi de Kepler est : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$ (1)

6- * Expression du rayon orbital de la lune :

- On applique la loi de Kepler, pour le mouvement de la Lune par rapport à la Terre qui est circulaire uniforme de période T' : $\frac{T'^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.m}$ (2)

- Des deux relations (1) et (2), on peut écrire : $\frac{T^2 \cdot M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G} = \frac{T'^2 \cdot m}{r^3}$

- On en déduit l'expression du rayon : $r = R \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T'}{T}\right)^2 \cdot \frac{m}{M}}$

* Calcul du rayon orbital de la trajectoire de la lune :

$$r = 1,49 \cdot 10^8 \times \sqrt[3]{\left(\frac{27,32}{365,25}\right)^2 \times \frac{1}{3,35 \cdot 10^5}} \approx 3,81 \cdot 10^5 \text{ km}$$