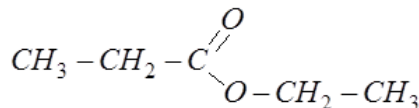


- Chimie -

Partie I :

1- Etude de l'hydrolyse d'un ester :

1-1-1- \* Formule semi-développée de l'ester E :



\* Son nom : propanoate d'éthyle

1-1-2- Détermination de la masse de l'acide formé à l'équilibre chimique :

- La constante de l'équilibre est :  $K = \frac{[acide]_{eq} \times [alcool]_{eq}}{[ester]_{eq} \times [eau]_{eq}}$  avec  $[X] = \frac{n(X)}{V_{sol}}$

- En se servant du tableau d'avancement de l'hydrolyse :

Equation de la réaction		$C_2H_5COOC_2H_5 + H_2O \rightleftharpoons C_2H_5COOH + C_2H_5OH$			
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	0,1	0,1	0	0
Etat intermédiaire	X	0,1-x	0,1-x	x	x
Etat équivalence	$x_{eq}$	0,1- $x_{eq}$	0,1- $x_{eq}$	$x_{eq}$	$x_{eq}$

On écrit :  $K = \frac{x_{eq}^2}{(0,1-x_{eq})^2}$  ; on obtient :  $x_{eq} = \frac{0,1 \times \sqrt{K}}{\sqrt{K}-1}$  ou  $x_{eq} = \frac{0,1 \times \sqrt{K}}{\sqrt{K}+1}$  (avec  $0 < x_{eq} < 0,1 \text{ mol}$ )

On retient la solution convenable :  $x_{eq} = \frac{0,1 \times \sqrt{K}}{\sqrt{K}+1} = \frac{0,1 \times \sqrt{0,25}}{\sqrt{0,25}+1} \approx 0,033 \text{ mol}$

- La masse de l'acide formé à l'équilibre est :  $m = x_{eq} \cdot M(C_2H_5COOH) \approx 0,333 \times 74 \approx 2,44 \text{ g}$

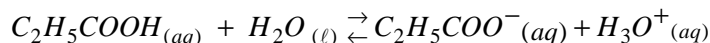
1-2-1- Equation de la réaction :  $C_2H_5COOC_2H_5 + HO^- \rightleftharpoons C_2H_5COO^- + C_2H_5OH$

1-2-2- Rendement de cette réaction :

$$r = \frac{n_{exp}(alcool)}{n_{théorique}(alcool)} = \frac{\frac{m_{exp}}{M(C_2H_5OH)}}{\frac{m_0}{M(E)}}, \text{ ou bien : } r = \frac{m_{exp}}{m_0} \times \frac{M(E)}{M(C_2H_5OH)} \quad \text{A.N : } r = \frac{4,2}{10,2} \times \frac{102}{46} = 0,91 = 91\%$$

2- Etude d'une solution d'acide propanoïque :

2-1-1- Equation chimique de la réaction entre l'acide propanoïque et l'eau :



2-1-2- Expression du  $pK_A$  :

D'après le cours on a la relation suivante :  $pH = pK_A + \log \left( \frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} \right)$ .

2-1-3-Taux d'avancement final  $\tau$  : On a :  $\tau = \frac{x_f}{x_m} = \frac{[H_3O^+]}{C}$  ; ou bien

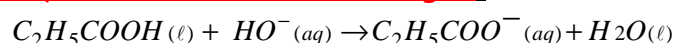
$$\tau = \frac{[H_3O^+]}{[C_2H_5COOH] + [C_2H_5COO^-]} = \frac{[H_3O^+]}{[C_2H_5COOH] + [H_3O^+]} = \frac{1}{1 + \frac{[C_2H_5COOH]}{[H_3O^+]}} \quad (*)$$

Or d'après le résultat :  $pH = pK_A + \log\left(\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}\right)$  ; alors :  $\frac{[C_2H_5COOH]}{[C_2H_5COO^-]} = 10^{pK_A - pH}$  (\*\*)

On remplace (\*\*) dans (\*), on aura l'expression :  $\tau = \frac{1}{1 + 10^{pK_A - pH}}$

**A.N :**  $\tau = \frac{1}{1 + 10^{4,9 - 2,9}} \approx 9,9 \cdot 10^{-3} \approx 1\%$

**2-2-1- Equation chimique de la réaction du dosage :**



**2-2-2-Recherche de l'expression du rapport :**  $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}$

- Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$C_2H_5COOH(\ell) + HO^-(aq) \rightarrow C_2H_5COO^-(aq) + H_2O(\ell)$			
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$C_A \cdot V_A$	$C_B \cdot V_B$	0	0
Etat intermédiaire	x	$C_A \cdot V_A - x$	$C_B \cdot V_B - x$	x	x
Etat équivalence	$x_E$	$C_A \cdot V_A - x_E$	$C_B \cdot V_{B,E} - x_E$	$x_E$	$x_E$

- Avant l'équivalence  $V_B < V_{B,E}$ , le réactif limitant est  $HO^-(aq)$  :  $n(HO^-) = C_B V_B - x = 0 \Rightarrow x = C_B V_B$

- D'après le tableau :  $[C_2H_5COO^-] = \frac{x}{V_A + V_B}$  et  $[C_2H_5COOH] = \frac{C_A V_A - x}{V_A + V_B}$

Et le rapport s'écrit :  $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} = \frac{C_B V_B}{C_A V_A - C_B V_B}$

Or au point d'équivalence, la relation qui se réalise est :  $C_A V_A = C_B V_{B,E}$

- L'expression finale est :  $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} = \frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}$

**2-2-2- Vérification du  $pK_A$  du couple  $C_2H_5COOH / C_2H_5COO^-$  :**

- La fonction  $pH = \log\left(\frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}\right)$  est affine d'équation  $pH = a \cdot \log\left(\frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}\right) + b$  (1)

Où b représente l'ordonnée à l'origine, et graphiquement il vaut :  $b \approx 4,9$

- En comparant la relation (1) avec celle donnée à la réponse de la question **2-1-2-**

$pH = \log\left(\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}\right) + pK_A$  ; On déduit alors  $pK_A \approx 4,9$

**Partie II :**

**1- Le bon choix est :** b) Le pôle positif de la pile est l'électrode de l'argent.

- Le quotient de réaction initial :  $Q_{r,i} = \frac{[Cd^{2+}]_i}{[Ag^+]_i^2} = \frac{0,2}{0,4^2} = 1,25 \ll K = 5 \cdot 10^{40}$

- Le sens de la réaction spontanée est le sens direct  $\rightarrow$  ; donc il y aura oxydation du cadmium Cd qui est l'électrode anode ou pole négatif de cette pile.

**2-1- Expression du quotient de la réaction :**

$$Q_r = \frac{[Cd^{2+}]_{(t)}}{[Ag^+]_{(t)}^2} = \frac{\frac{C_2.V + x}{V}}{\left(\frac{C_1.V - 2.x}{V}\right)^2} = \frac{C_2.V^2 + V.x}{(C_1.V - 2.x)^2} \quad \text{A.N : } Q_r = \frac{1,25.10^{-2} + 0,25.x}{(0,1 - 2.x)^2}$$

**2-2- Calcul du quotient de la réaction à t = 10h :**

- Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$2Ag^+_{(aq)} + Cd_{(s)} \rightleftharpoons 2.Ag_{(s)} + Cd^{2+}_{(aq)}$				Quantité de matière des e <sup>-</sup> échangés :
Etats du système	Avancement x (mol)	Quantités de matière (mol)				
E. Initial	0	$C_1.V$	$n_i(Cd)$	$n_i(Ag)$	$C_2.V$	0
E. Intermédiaire	x	$C_1.V - 2.x$	$n_i(Cd) - x$	$n_i(Ag) + 2.x$	$C_2.V + x$	$n(e^-) = 2.x$
E. Final	x <sub>max</sub>	$C_1.V - 2.x_m$	$n_i(Cd) - x_m$	$n_i(Ag) + 2.x_m$	$C_2.V + x_m$	$n(e^-) = 2.x_m$

- Cherchons l'avancement x à cet instant :

On a la quantité d'électricité Q transportée pendant  $\Delta t$ , par les porteurs de charges (les électrons dans le circuit extérieur de la pile) est :  $Q = n(e^-).F = I.\Delta t$  avec  $n(e^-) = 2.x$  d'où :

$$x = \frac{I.\Delta t}{2.F} \quad \text{A.N : } \frac{0,215 \times 10 \times 3600}{2 \times 9,65.10^4} \approx 0,04 \text{ mol}$$

$$\text{A.N : } Q_r = \frac{1,25.10^{-2} + 0,25 \times 0,04}{(0,1 - 2 \times 0,04)^2} \approx 56,25$$

**2-3- Calcul de la variation  $|\Delta m|$  :**

- Quand la pile sera usée, les ions  $Ag^+$  disparaissent totalement (Cd est en excès) :

$$n_f(Ag^+) = C_1.V - 2.x_m = 0 ; \text{ c.à.d } x_m = \frac{C_1.V}{2}$$

- La variation de masse :  $|\Delta m| = |\Delta n(Cd)| \times M(Cd)$  ou bien  $|\Delta m| = |n_f(Cd) - n_i(Cd)| \times M(Cd)$

Ce qui donne  $|\Delta m| = |(n_i(Cd) - x_m) - n_i(Cd)| \times M(Cd) = x_m \times M(Cd)$

$$\text{Finalement : } |\Delta m| = \frac{C_1.V}{2} \times M(Cd) \quad \text{A.N : } |\Delta m| = \frac{0,4 \times 0,25}{2} \times 112,4 = 5,62 \text{ g}$$

**- Physique -**

**LES TRANSFORMATIONS NUCLEAIRES :**

**1- Le bon choix est :** c) D'après la courbe d'Aston, pour les noyaux lourds, le degré de stabilisation diminue lorsque la masse du noyau augmente.

**2-Définition :** La radioactivité  $\beta^-$  est une réaction spontanée au cours de laquelle un noyau instable se désintègre en un nouveau noyau plus stable, en émettant des électrons (notés  $\beta^-$ ).

### 3- Calcul de l'énergie libérée $|\Delta E|$ :

L'équation de désintégration est :  ${}_{27}^{60}\text{Co} \rightarrow {}_{28}^{60}\text{X} + {}_{-1}^0e$

On a :  $|\Delta E| = |E_{\ell}({}_{27}^{60}\text{Co}) - E_{\ell}({}_{28}^{60}\text{X})|$  ; or  $E_{\ell}({}_{27}^{60}\text{Co}) = (27.m({}_1^1p) + (60-27).m({}_0^1n) - m({}_{27}^{60}\text{Co}))c^2$  (2)

De la relation (2), on calcule d'abord  $E_{\ell}({}_{27}^{60}\text{Co})$  :

$$E_{\ell}({}_{27}^{60}\text{Co}) = (27 \times 1,00728 + 33 \times 1,00866 - 59,8523).u \times c^2 \approx 0,63 \times 931,949 \text{ MeV} \approx 586,841 \text{ MeV}$$

**A.N :**  $|\Delta E| = |586,841 - 588,387| \approx 1,55 \text{ MeV}$

### 4- Montrons la relation $t_1 = \tau \cdot \ln\left(\frac{N_A \cdot m_0}{\tau \cdot M \cdot a_1}\right)$ :

- On sait que, d'après la loi de désintégration, l'activité :  $a(t_1) = a_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_1}$  avec  $a_0 = \lambda \cdot N_0 = \lambda \cdot N_A \cdot \frac{m_0}{M}$

On combine ces relations, on obtient :  $a_1 = \frac{\lambda \cdot N_A \cdot m_0}{M} \cdot e^{-\lambda \cdot t_1}$  ou bien  $\frac{M \cdot a_1}{\lambda \cdot N_A \cdot m_0} = e^{-\lambda \cdot t_1}$

Sachant que  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  ; donc :  $\frac{\tau \cdot M \cdot a_1}{N_A \cdot m_0} = e^{-t_1 / \tau}$  alors  $\ln(e^{t_1 / \tau}) = \ln\left(\frac{N_A \cdot m_0}{\tau \cdot M \cdot a_1}\right)$

Finalement :  $t_1 = \tau \cdot \ln\left(\frac{N_A \cdot m_0}{\tau \cdot M \cdot a_1}\right)$  **A.N :**  $t_1 = \frac{2,8 \cdot 10^3}{365,25} \times \ln\left(\frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 50 \cdot 10^{-3}}{2,8 \cdot 10^3 \times 24 \times 3600 \times 60 \times 5,18 \cdot 10^{11}}\right) \approx 10,63 \text{ ans}$

## L'ELECTRICITE :

### I - La Charge et la décharge d'un condensateur :

#### 1- Charge d'un condensateur :

##### 1-1- Equation différentielle que vérifie l'intensité $i(t)$ :

D'après la figure ci-contre :  $u_R + u_C = E$  (1)

En respectant les conventions :  $u_C = \frac{q}{C}$  et  $u_R = R \cdot i$

La relation (1) devient :  $R \cdot i + \frac{q}{C} = E$  (2) et  $E = C \frac{dq}{dt}$

En dérivant la relation (2), on aura :  $R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0$  avec  $i = \frac{dq}{dt}$

Finalement l'équation différentielle :  $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot i = 0$

##### 1-2- Détermination de R :

- Graphiquement la constante du temps est :  $\tau = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$

- La constante du temps  $\tau = RC$  donne :  $R = \frac{\tau}{C}$  **A.N :**  $R = \frac{10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 400 \Omega$

##### 1-3- Détermination de $U_0$ :

- A  $t = 0$  ; graphiquement :  $i(0) = 10 \text{ mA} = 10^{-2} \text{ A}$

- A  $t = 0$  ; l'équation différentielle devient :  $u_R(0) + u_C(0) = E$  ; qui peut s'écrire :  $R \cdot i(0) + U_0 = E$

D'où :  $U_0 = E - R \cdot i(0)$  **A.N :**  $U_0 = 8 - 400 \times 10^{-2} = 4 \text{ V}$

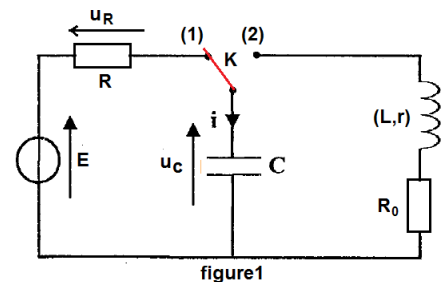


figure1

**1-4- \* Recherche de l'expression de l'énergie électrique emmagasinée entre  $t=0$  et  $t_{\infty}$ :**

On a :  $E_{el} = E_{el}(t \rightarrow \infty) - E_{el}(t=0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left( \underbrace{u_c(t_{\infty})}_{=E} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$  ce qui donne :  $E_{el} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (E^2 - U_0^2)$

**A.N :**  $E_{el} = \frac{1}{2} \times 2,5 \cdot 10^{-6} \times (8^2 - 4^2) = 6 \cdot 10^{-5} J = 60 \mu J$

**2- Oscillations libres dans le circuit RLC :**

**2-1- Recherche de l'expression de l'énergie magnétique  $E_m(t)$  :**

Soit une bobine de coefficient d'auto-inductance  $L$ , traversée par un courant d'intensité  $i(t)$  à l'instant  $t$ , et la tension entre ses bornes est  $u_L(t)$  : la puissance instantanée est alors :  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

Dans la convention " récepteur " la tension s'écrit :  $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$

Donc  $p(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \times i(t) = \frac{L}{2} \cdot \frac{d}{dt} (i^2(t))$  ou bien  $p(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) \right)$  (1)

En comparant la relation (1) avec la relation suivante :  $p(t) = \frac{d}{dt} (E_m(t))$

On en déduit :  $E_m(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$

**2-2- Recherche de l'expression  $\frac{d}{dt} (E_{Tot}(t))$  :**

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC est :  $E_{Tot}(t) = E_{el}(t) + E_m(t)$

Ou bien  $E_{Tot}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2(t) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$

- Dérivons cette expression  $\frac{d}{dt} (E_{Tot}(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2(t) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) \right) = C \cdot u_c(t) \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt}$

Or  $u_c = \frac{q}{C}$  et  $\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{i}{C}$  donc  $\frac{d}{dt} (E_{Tot}(t)) = q(t) \cdot \frac{i(t)}{C} + L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} = i(t) \cdot \left( \frac{q(t)}{C} + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \right)$  (\*)

Et d'après la loi d'additivité des tensions :

$u_c + u_b + u_{R_0} = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R_0 \cdot i(t) = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -(r + R_0) \cdot i(t)$

On remplace cette dernière expression dans la relation (\*) :  $\frac{d}{dt} (E_{Tot}(t)) = i(t) \cdot [-(r + R_0) \cdot i(t)]$

Finalement on aboutit à l'expression finale :  $\frac{dE_{Tot}(t)}{dt} = -(r + R_0) \cdot i^2(t)$

**2-3- Détermination de l'énergie dissipée  $|\Delta E|$  entre  $t=0$  et  $t=t_1$  :**

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à  $t=0$  est :

$E_{Tot}(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left( \underbrace{u_c(0)}_{=E} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left( \underbrace{i(0)}_{=0} \right)^2 \Rightarrow E_{Tot}(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à  $t=t_1$  est :

$E_{Tot}(t_1) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2(t_1) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t_1)$  (\*)

- D'après la loi d'ohm :  $u_{R_0}(t_1) = R_0 \cdot i(t_1) \Rightarrow i(t_1) = \frac{u_{R_0}(t_1)}{R_0}$  (1)

- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_c + u_b + u_{R_0} = 0 \Rightarrow u_c(t_1) + r \cdot i(t_1) + L \cdot \left( \frac{di(t)}{dt} \right)_{t=t_1} + u_{R_0}(t_1) = 0$$

$$\Rightarrow u_c(t_1) = -r \cdot \frac{u_{R_0}(t_1)}{R_0} - u_{R_0}(t_1) \Rightarrow u_c(t_1) = -\left( \frac{r + R_0}{R_0} \right) u_{R_0}(t_1) \quad (2)$$

- On remplace (1) et (2) dans (\*), on obtient :

$$E_{Tot}(t_1) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left( -\left( \frac{r + R_0}{R_0} \right) u_{R_0}(t_1) \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left( \frac{u_{R_0}(t_1)}{R_0} \right)^2 \Rightarrow E_{Tot}(t_1) = \frac{(u_{R_0}(t_1))^2}{2 \cdot R_0^2} \cdot (L + C \cdot (r + R_0)^2)$$

- Alors l'énergie dissipée  $|\Delta E|$  entre  $t=0$  et  $t=t_1$  :  $|\Delta E| = |E_{Tot}(t_1) - E_{Tot}(t=0)|$

$$|\Delta E| = \left| \frac{(u_{R_0}(t_1))^2}{2 \cdot R_0^2} \cdot (L + C \cdot (r + R_0)^2) - \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \right| \Rightarrow |\Delta E| = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{R_0}^2}{R_0^2} \cdot (L + C \cdot (r + R_0)^2) - C \cdot E^2$$

**A.N :**  $|\Delta E| = \frac{1}{2} \times \frac{0,44^2}{30^2} \times (0,5 + 2,5 \cdot 10^{-6} \times (7 + 30)^2) - 2,5 \cdot 10^{-6} \times 8^2 \approx 2,59 \cdot 10^{-5} J \approx 26 \mu J$

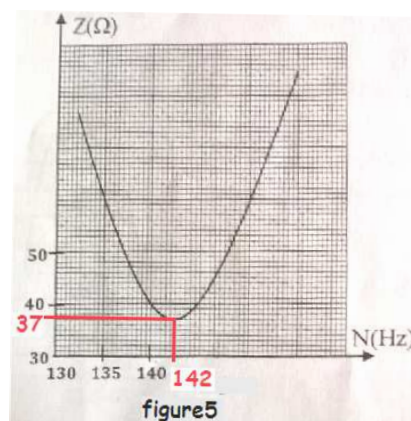
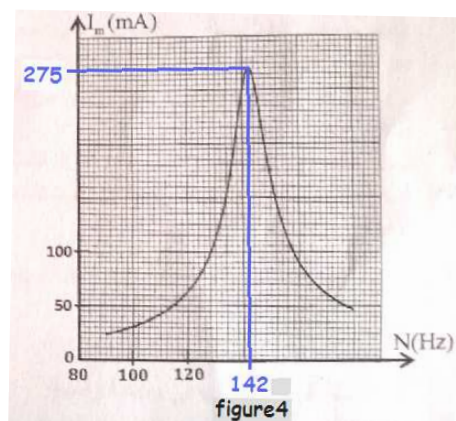
## II - Oscillations forcées dans le circuit RLC :

**1- Le bon choix est :** d) Expression du facteur de qualité  $Q = \frac{N_0}{\Delta N}$

a) Le GBF joue le rôle de l'excitateur, b) les oscillations étudiées sont forcées, et

c)  $\phi$  représente le déphasage entre la tension  $u(t)$  et l'intensité du courant électrique  $i(t)$ .

**2- Détermination de la valeur de  $U_m$ ,  $L_0$  et  $r_0$  :**



- Figure 5 : à la résonance  $Z = 37 \Omega$ , et on sait que  $Z = R_{Tot} = r_0 + R_0$

D'où :  $r_0 = Z - R_0$  **A.N :**  $r_0 = 37 - 30 = 7 \Omega$

- Figure 4 : à la résonance  $I_m = 275 \text{ mA}$  et  $N_0 = 142 \text{ Hz}$

\* On sait que  $U_m = Z \cdot I_m$  **A.N :**  $U_m = 37 \times 0,275 \approx 10 \text{ V}$

\* On sait que  $L_0 \cdot C \cdot (2 \cdot \pi \cdot N_0)^2 = 1$  d'où  $L_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot N_0^2 \cdot C}$  **A.N :**  $L_0 = \frac{1}{4 \times 10 \times 142^2 \times 2,5 \cdot 10^{-6}} \approx 0,5 \text{ H}$



**3- Détermination de la puissance électrique moyenne consommée à la résonance :**

A la résonance :  $P = R_{\text{Tot}} \cdot I^2$  c'est la puissance consommée par les résistances du circuit.

Or  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  donc  $P = \frac{1}{2} \cdot (r_0 + R_0) \cdot I_m^2$  **A.N :**  $P = \frac{1}{2} \cdot (7 + 30) \cdot 0,275^2 \approx 1,4W$

**LA MECANIQUE :**

**PARTIE I :** Etude du mouvement d'un oscillateur (corps solide - ressort)

**1- Etude du mouvement de l'oscillateur mécanique en position horizontale :**

**1-1- Equation différentielle du mouvement que vérifie l'abscisse  $x(t)$  :**

- Système à étudier : {corps(S)}

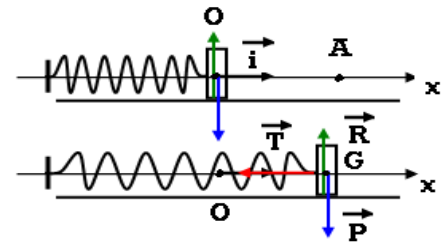
- Repère d'étude R (O ;  $\vec{i}$ ) supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

\* Poids du corps (S) :  $\vec{P}$  ;

\* Action du plan horizontal :  $\vec{R}$

\* Action du ressort :  $\vec{T}$



- La 2<sup>ème</sup> loi de newton donne :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Ox :  $P_x + R_x + T_x = m \cdot a_x$  (\*)

- Expressions :  $P_x = 0$  ,  $R_x = 0$  ,  $T_x = -T = -k \cdot x$  et  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

- La relation (\*) devient :  $0 + 0 - k \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$

- Finalement l'équation différentielle sera :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$

**1-2- Détermination de  $x_m$  et  $\varphi$  :**

**\* Détermination de  $x_m$  :**

- La solution de l'équation différentielle est de la forme :  $x = x_m \cos(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi)$

- Graphiquement (figure2) :  $a_{\max} = 5m \cdot s^{-2}$  et  $T_0 = 0,4s$

- En dérivant successivement deux fois cette solution, on obtient l'expression de l'accélération de G le centre d'inertie du corps (S) :

$$a_x(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ ou bien } a_x(t) = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi + \pi\right) = a_{\max} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi + \pi\right)$$

Avec  $a_{\max} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x_m$  alors  $x_m = \frac{a_{\max} \cdot T_0^2}{4\pi^2}$  **A.N :**  $x_m = \frac{5 \times 0,4^2}{4 \times 10} = 0,02m = 2cm$

**\* Détermination de  $\varphi$  :**

A  $t=0$  : graphiquement  $a_x(0) = -a_{\max}$  et  $a_x(0) = a_{\max} \cdot \cos(\varphi + \pi)$  alors  $\cos(\varphi + \pi) = -1$

ou bien  $-\cos(\varphi) = -1 \Rightarrow \cos(\varphi) = 1$  ; finalement :  $\varphi = 0$

## 2- Etude du mouvement de l'oscillateur mécanique en position verticale :

### 2-1- Détermination de l'allongement $\Delta\ell_0 = \ell - \ell_0$ :

A l'équilibre :  $\vec{T}_0 + \vec{P} = \vec{0}$ , et par projection sur l'axe vertical Oz, on aura :

$$T_{0z} + P = 0 \text{ alors } k \cdot \Delta\ell_0 + m \cdot g = 0 \text{ d'où } \Delta\ell_0 = -\frac{m \cdot g}{k}$$

### 2-2- Montrons que $E_p = A \cdot z^2 + B$

- L'énergie potentielle totale est :  $E_p = E_{pp} + E_{pe}$  (\*)

- L'énergie potentielle de pesanteur est :  $E_{pp} = -m \cdot g \cdot z + C$

Or en  $z=0$  on a  $E_{pp}=0$  donc  $C=0$  ; d'où  $E_{pp} = -m \cdot g \cdot z$  (1)

- L'énergie potentielle élastique est :  $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2 + C'$

Or lorsque  $\Delta\ell=0$  on a  $E_{pe}=0$  donc  $C'=0$  ; d'où  $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2$  (2)

- On porte (1) et (2) dans (\*), on aura :

$$E_p = -m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2, \text{ avec } \Delta\ell = \ell - \ell_0 \text{ et } z = \ell_{eq} - \ell$$

On peut écrire :  $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = (\ell - \ell_{eq}) + (\ell_{eq} - \ell_0) = -z + \Delta\ell_0$

$$\text{Donc } E_p = -m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (-z + \Delta\ell_0)^2 = \underbrace{-(m \cdot g + k \cdot \Delta\ell_0)}_{=0} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot z^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2$$

$$\text{Finalement on aboutit à l'expression : } E_p = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot k \cdot z^2}_A + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2}_B$$

### 2-3-1- Déterminons $k$ et $\Delta\ell_0$ :

- La figure4 nous permet d'avoir :  $E_p(z=0) = 40 \text{ mJ}$  et  $E_p(z=2 \text{ cm}) = 50 \text{ mJ}$

$$\text{- soit le système : } \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2 = E_p(z=0) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot k \cdot z_m^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2 = E_p(z_m = 2 \text{ cm}) & (2) \end{cases}$$

- Des relations (1) et (2) on peut écrire :  $\frac{1}{2} \cdot k \cdot z_m^2 = E_p(z_m = 2 \text{ cm}) - E_p(z=0)$

$$\text{Donc : } k = \frac{2}{z_m^2} \times [E_p(z_m = 2 \text{ cm}) - E_p(z=0)] \quad \text{A.N : } k = \frac{2}{0,02^2} \times [50 \cdot 10^{-3} - 40 \cdot 10^{-3}] = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

- De la relation (1) :  $\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell_0)^2 = E_p(z=0)$  on déduit  $\Delta\ell_0 = -\sqrt{\frac{2 \cdot E_p(z=0)}{k}}$

$$\text{A.N : } \Delta\ell_0 = -\sqrt{\frac{2 \times 40 \cdot 10^{-3}}{50}} = -0,04 \text{ m} = -4 \text{ cm}$$

### 2-3-2- Détermination du travail de la force de rappel :

On a  $E_p = E_{pp} + E_{pe}$  alors  $\Delta E_p = \Delta E_{pp} + \Delta E_{pe}$  or  $\Delta E_{pp} = -W_{\vec{P}} = -m \cdot g \cdot (z_2 - z_1)$  et  $\Delta E_{pe} = -W_{\vec{T}}$

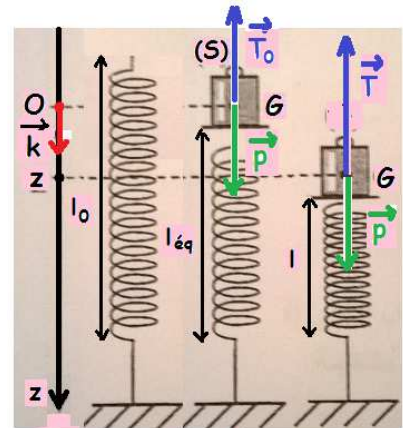


figure3



Donc  $\Delta E_p = -m.g.(z_2 - z_1) - \int_{z_1 \rightarrow z_2} W(\vec{T}) dz$  d'où  $\int_{z_1 \rightarrow z_2} W(\vec{T}) dz = -\Delta E_p - m.g.(z_2 - z_1)$  or  $-m.g = k.\Delta \ell_0$

Finalement on arrive à l'expression :  $\int_{z_1 \rightarrow z_2} W(\vec{T}) dz = -\Delta E_p + k.\Delta \ell_0.(z_2 - z_1)$

A.N :  $\int_{z_1 \rightarrow z_2} W(\vec{T}) dz = -(50 - 45).10^{-3} + 50 \times (-4.10^{-2}) \times (1,4.10^{-2} - 0) = -3,3.10^{-2} J$

## PARTIE II : Détermination du rayon de l'orbite de la lune autour de la terre

### 1- Définition :

Le référentiel géocentrique est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines qui apparaissent fixes.

2- Le bon choix est : d) La vitesse d'une planète autour du soleil ne dépend pas de la masse de cette planète.

( a) Unité de la constante gravitationnelle  $N.m^2.kg^{-2}$  ; b) Le vecteur accélération est radial mais non tangentiel ; c) Le vecteur accélération change de direction durant le mouvement circulaire uniforme).

### 3- Expression vectorielle de la force de gravitation :

Dans  $(\vec{u}; \vec{n})$  on a :  $\vec{F}_{S/T} = G \cdot \frac{m.M}{R^2} \cdot \vec{n}$

### 4- Le mouvement de la terre est circulaire uniforme :

- Système à étudier : {Terre (m)}

- Repère d'étude  $(S, \vec{i}, \vec{j})$  supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :  $\vec{F}_{S/T}$

- La 2<sup>ème</sup> loi de newton s'écrit :  $\vec{F}_{S/T} = m.a_G$  ou bien  $m.a_G = G \cdot \frac{M.m}{R^2} \cdot \vec{n}$  alors  $a_G = G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot \vec{n}$

Ce qui prouve que le vecteur accélération est radial, et que sa composante tangentielle est nulle,  $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$  : On en déduit que la vitesse est constante ou le mouvement est uniforme.

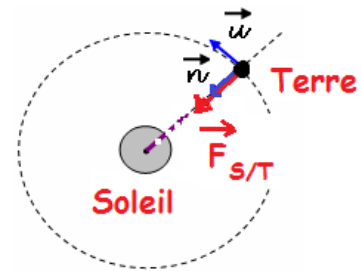
D'autre part  $a_N = a_G \Rightarrow \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M}{R^2} \Rightarrow R = \frac{G.M}{v^2} = Cte$  : On en déduit que le rayon est constant ou le mouvement est circulaire.

Finalement le mouvement de la terre par rapport au soleil est circulaire uniforme.

### 5- La troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = K = Cte$

Puisque le mouvement de la Terre par rapport au Soleil est circulaire uniforme de période T ;

alors :  $T = \frac{2\pi R}{v}$  avec  $v = \sqrt{\frac{G.M}{R}}$  ; ce qui donne  $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{G.M}{R}}}$  ou  $T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{R^3}{G.M}$



Finalement la loi de Kepler est :  $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$  (1)

6- \* Expression du rayon orbital de la lune :

- On applique la loi de Kepler, pour le mouvement de la Lune par rapport à la Terre qui est

circulaire uniforme de période  $T'$  :  $\frac{T'^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.m}$  (2)

- Des deux relations (1) et (2), on peut écrire :  $\frac{T^2.M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G} = \frac{T'^2.m}{r^3}$

- On en déduit l'expression du rayon :  $r = R \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T'}{T}\right)^2 \cdot \frac{m}{M}}$

\* Calcul du rayon orbital de la trajectoire de la lune :

$$r = 1,49 \cdot 10^8 \times \sqrt[3]{\left(\frac{27,32}{365,25}\right)^2 \times \frac{1}{3,35 \cdot 10^5}} \approx 3,81 \cdot 10^5 \text{ km}$$