

- Chimie -

Partie I : Etude de la pile aluminium - Zinc

1- * Calcul de quotient de réaction à l'état initial :

$$Q_{r,i} = \frac{[Zn^{2+}]_i^3}{[Al^{3+}]_i^2} = \frac{C_2^3}{C_1^2} = \frac{(4,5 \cdot 10^{-2})^3}{(4,5 \cdot 10^{-2})^2} = 4,5 \cdot 10^{-2} \gg K = 10^{-90}$$

*** Conclusion :**

Le sens de la réaction spontanée est le sens inverse \leftarrow ; où il y aura consommation de l'aluminium Al : $2.Al_{(s)} + 3.Zn^{2+}_{(aq)} \rightarrow 2.Al^{3+}_{(aq)} + 3.Zn_{(s)}$

2- Schéma conventionnel de la pile :

L'aluminium s'oxyde à l'anode qui est le pôle négatif de cette pile.



3-1- La concentration des ions Aluminium :

- Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$2.Al_{(s)} + 3.Zn^{2+}_{(aq)} \rightarrow 2.Al^{3+}_{(aq)} + 3.Zn_{(s)}$				Quantité de matière des e^- échangés :
Etats du système	Avancement x (mol)	Quantités de matière (mol)				
E. Initial	0	$n_i(Al)$	$C_2 \cdot V$	$C_1 \cdot V$	$n_i(Zn)$	0
E. Intermédiaire	x	$n_i(Al) - 2 \cdot x$	$C_2 \cdot V - 3 \cdot x$	$C_1 \cdot V + 2 \cdot x$	$n_i(Zn) + 3x$	$n(e^-) = 6 \cdot x$
E. Final	x_{\max}	$n_i(Al) - 2 \cdot x_m$	$C_2 \cdot V - 3 \cdot x_m$	$C_1 \cdot V + 2 \cdot x_m$	$n_i(Zn) + 3x_m$	$n(e^-) = 6 \cdot x_m$

- Le réactif limitant :

* Si l'aluminium est le réactif limitant ; alors :

$$n_i(Al) - 2 \cdot x_m = 0 \Rightarrow \frac{m_0}{M(Al)} - 2 \cdot x_m = 0 \Rightarrow x_m = \frac{m_0}{2 \cdot M(Al)} = \frac{1,35}{2 \cdot 27} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

* Si l'ion Zinc est le réactif limitant ; alors :

$$C_2 \cdot V - 3 \cdot x_m = 0 \Rightarrow x_m = \frac{C_2 \cdot V}{3} = \frac{4,5 \cdot 10^{-2} \times 0,1}{3} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

On constate que : $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} < 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$, donc l'ion Zinc est le réactif limitant.

$$- [Al^{3+}]_f = \frac{C_1 \cdot V + 2 \cdot x_m}{V} \Rightarrow [Al^{3+}]_f = C_1 + \frac{2 \cdot x_m}{V} \quad A.N : [Al^{3+}]_f = 4,5 \cdot 10^{-2} + \frac{2 \times 1,5 \cdot 10^{-3}}{0,1} \approx 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

3-2- La durée de fonctionnement de la pile :

La quantité d'électricité qui a circulée pendant la durée Δt est : $Q = I \times \Delta t = 6 \cdot x_m \times F$

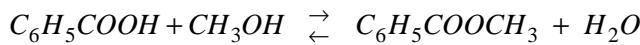
$$\text{alors : } \Delta t = \frac{6 \cdot x_m \times F}{I} \quad A.N \quad \Delta t = \frac{6 \times 1,5 \cdot 10^{-3} \times 9,65 \cdot 10^4}{10 \times 10^{-3}} = 8,685 \cdot 10^4 \text{ s} = 24h7 \text{ min } 30s$$

Partie II : Synthèse d'un ester, et réaction de benzoate de sodium avec un acide

1- Etude de la synthèse d'un ester :

1-1- Choix du chauffage à reflux : C'est d'augmenter la vitesse de réaction, et éviter les pertes des quantités de matière des espèces chimiques.

1-2- Equation chimique :



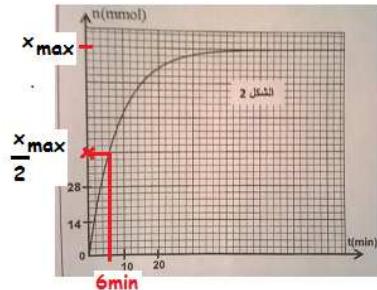
1-3-1- Le bon choix est : c) La vitesse est maximale au début de la réaction.

1-3-2- * Définition : Le temps de demi-réaction est la durée au bout de laquelle l'avancement de la réaction prend la moitié de sa valeur atteinte à l'équilibre du système chimique ; c'est-à-dire :

$$x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$$

*** Détermination graphique de $x(t_{1/2})$:**

Graphiquement ; $x_f = 84 \text{ mmol} \Rightarrow \frac{x_f}{2} = 42 \text{ mmol} \Rightarrow t_{1/2} = 6 \text{ min}$



1-3-3- Le rendement de la réaction :

$$\text{Par définition : } r = \frac{n_{\text{exp}}(\text{ester})}{n_{\text{théorique}}(\text{ester})}$$

Graphiquement on a : $n_{\text{exp}}(\text{ester}) = x_f = 84 \text{ mmol}$

On cherche $n_{\text{théorique}}(\text{ester})$:

En se servant du tableau d'avancement de la réaction ; on écrit : $n_{\text{théorique}}(\text{ester}) = x_{\text{max}}$

* Si l'acide est le réactif limitant ; alors :

$$n_i(\text{acide}) - x_m = 0 \Rightarrow \frac{m}{M(\text{ac})} - x_m = 0 \Rightarrow x_m = \frac{m}{M(\text{ac})} = \frac{12,2}{122} = 0,1 \text{ mol}$$

* Si l'alcool est le réactif limitant ; alors :

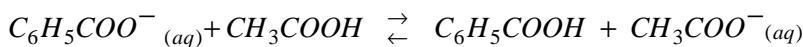
$$n_i(\text{alcool}) - x_m = 0 \Rightarrow \frac{m'}{M(\text{al})} - x_m = 0 \Rightarrow x_m = \frac{\rho \times V}{M(\text{al})} = \frac{0,8 \times 8}{32} = 0,2 \text{ mol}$$

Donc $n_{\text{théorique}}(\text{ester}) = x_{\text{max}} = 0,1 \text{ mol}$

$$\text{Finalement : } r = \frac{84 \cdot 10^{-3}}{0,1} = 0,84 = 84\%$$

2- Etude de la réaction de benzoate de sodium avec un acide :

2-1- Equation chimique :



2-2- La constante de l'équilibre :

$$\text{On sait que } K = \frac{K_A(CH_3COOH / CH_3COO^{-})}{K_A(C_6H_5COOH / C_6H_5COO^{-})} = 10^{pK_{A1} - pK_{A2}} \quad \text{A.N : } K = 10^{4,2-4,8} \approx 0,25$$

2-3- Expression de r :

En se servant du tableau d'avancement de la réaction ; on écrit :

$$K = \left(\frac{x_f}{C_1 V_1 - x_f} \right)^2 \Rightarrow x_f = \frac{C_1 V_1 \sqrt{K}}{\sqrt{K} + 1} ; \text{ Or } x_m = C_1 V_1 ; \text{ alors } \tau = \frac{x_f}{x_m} \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} + 1} = \frac{\sqrt{0,25}}{\sqrt{0,25} + 1} \approx 0,33$$

2-4- Expression du pH :

$$\text{On a } pH = pK_{A1} + \log \left(\frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]} \right) \Rightarrow pH = pK_{A1} + \log \left(\frac{x_f}{x_m - x_f} \right) = pK_{A1} + \log \left(\frac{x_f / x_m}{x_m / x_m - x_f / x_m} \right)$$

$$\text{Finalement : } pH = pK_{A1} + \log \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right) \quad \text{A.N : } pH = 4,2 + \log \left(\frac{0,33}{1-0,33} \right) \approx 3,9$$

- Physique -

LES ONDES : Propagation d'une onde ultrasonore

1- Détermination de la vitesse dans l'air :

1-1- Le bon choix est : b) Les ondes ultrasonores ne se propagent pas dans le vide.

$$\text{1-2- La fréquence N des ondes : } N = \frac{1}{T} \quad \text{A.N : } N = \frac{1}{2,5 \times 10 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^4 \text{ Hz} = 40 \text{ kHz}$$

1-3- Vérification de la vitesse dans l'air :

$$\text{On a : } d = k \cdot \lambda \text{ avec } k = 4 \text{ et } \lambda = \frac{V_a}{N} \text{ d'où : } V_a = \frac{d}{k} \cdot N \quad \text{A.N : } V_a = \frac{3,4 \cdot 10^{-2}}{4} \cdot 40000 = 340 \text{ m.s}^{-1}$$

2- Détermination de la vitesse dans l'eau de mer :

2-1- Expression de Δt :

- La vitesse du son est plus grande dans l'eau que dans l'air ;

- Si Δt est le retard temporel des ondes reçues dans l'eau par rapport à celles reçues dans

$$\text{l'eau, alors : } \Delta t = \Delta t_{air} - \Delta t_{eau} = \frac{\ell}{V_a} - \frac{\ell}{V_e} \Rightarrow \Delta t = \left(\frac{1}{V_a} - \frac{1}{V_e} \right) \times \ell \quad (1)$$

2-2- Détermination de la vitesse V_e :

- La courbe de la figure 4 est celle d'une fonction linéaire d'équation :

$$\Delta t = K \cdot \ell \quad (2) ; \text{ K est le coefficient directeur: } K = \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta \ell}$$

$$\text{- En comparant (1) et (2) ; on déduit : } \frac{1}{V_a} - \frac{1}{V_e} = K$$

$$\text{On obtient finalement : } V_e = \frac{V_a}{1 - K \cdot V_a} \quad \text{A.N : } V_e = \frac{340}{1 - \frac{2,5 \cdot 10^{-3} - 0}{1,1 - 0} \times 340} \approx 1496 \text{ m.s}^{-1}$$

L'ELECTRICITE :

Partie I : Etude du dipôle RC et du circuit LC

1- Etude du dipôle RC :

1-1- Expression de la capacité C_e :

$$\text{- La loi d'additivité des tensions s'écrit : } u = u_{c1} + u_{c2} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2} \quad (1)$$

- La tension aux bornes du condensateur équivalent s'écrit : $u = \frac{q}{C_e}$ (2)

- En comparant (1) et (2) ; on déduit que : $C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$.

1-2- Equation différentielle vérifiée par la tension $u_2(t)$:

D'après la figure1 : $u_1 + u_2 + u_R = E$ (1)

En respectant les conventions : $u_1 = \frac{q}{C_1}$; $u_2 = \frac{q}{C_2}$ et $u_R = R.i = R \cdot \frac{dq}{dt} = RC_2 \cdot \frac{du_2}{dt}$

La relation (1) devient : $\frac{C_2}{C_1} \cdot u_2 + u_2 + RC_2 \cdot \frac{du_2}{dt} = E$ ou bien $(\frac{C_2}{C_1} + 1) \cdot u_2 + RC_2 \cdot \frac{du_2}{dt} = E$

Ce qui donne : $\frac{1}{R} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \cdot u_2 + \frac{du_2}{dt} = \frac{E}{RC_2}$; finalement : $\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R \cdot C_e} \cdot u_2 + = \frac{E}{R \cdot C_2}$

1-3- Expression de A et α :

On porte la solution $u_2(t) = A \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t})$ dans l'expression de l'équation différentielle :

$\frac{d}{dt} [A \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t})] + \frac{A}{R \cdot C_e} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}) = \frac{E}{R \cdot C_2}$ ou bien $A \cdot (\alpha - \underbrace{\frac{1}{R \cdot C_e}}_{=0}) \cdot (e^{-\alpha \cdot t}) + \frac{1}{R} \cdot (\underbrace{\frac{A}{C_e} - \frac{E}{C_2}}_{=0}) = 0$

ce qui donne : $A = E \cdot \frac{C_e}{C_2} = E \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}$ et $\alpha = R \cdot C_e = R \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

1-4-1- a) valeur de E :

A $t=0$; l'équation différentielle s'écrit : $\left(\frac{du_2}{dt} \right)_{t=0} + \frac{1}{R \cdot C_e} \cdot \underbrace{u_2(t=0)}_{=0} + = \frac{E}{R \cdot C_2}$

On trouve alors : $E = R \cdot C_2 \cdot \left(\frac{du_2}{dt} \right)_{t=0}$ A.N : $E = 3 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^{-6} \times \frac{4 - 0}{2 \cdot 10^{-3} - 0} = 12V$

1-4-1- b) valeurs de u_1 et u_2 en régime permanent :

- D'après le graphe2, lorsque $t \rightarrow \infty$ alors $u_{2\infty} = 8V$

- D'après le graphe2, lorsque $t \rightarrow \infty$ alors $u_{R\infty} = 0$; et en utilisant : $u_{1\infty} + u_{2\infty} + u_{R\infty} = E$ (1)

On obtient : $u_{1\infty} = E - u_{2\infty} - u_{R\infty}$ A.N : $u_{1\infty} = 12 - 8 - 0 = 4V$

1-4-2- Montrons que $C_1 = 4\mu F$:

- D'après le graphe2, on trouve la constante $\tau = 4ms = 4 \cdot 10^{-3}s$

- Son expression est : $\tau = R \cdot C_e = R \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ donc : $(C_1 + C_2)\tau = R \cdot C_1 \cdot C_2$ ou bien :

$C_1 = \frac{C_2 \cdot \tau}{R \cdot C_2 - \tau}$ A.N : $C_1 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \times 4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-6} F = 4\mu F$

2- Etude des oscillations dans le circuit LC :

2-1- Equation différentielle vérifiée par la tension $u_1(t)$:

- Loi d'additivité des tensions : $u_2 + u_L = 0$ (1)

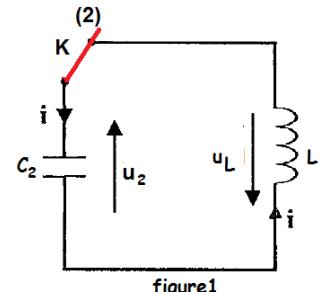
- En dérivant (1) on aura : $\frac{du_2}{dt} + \frac{du_L}{dt} = 0$ (2)

- En convention récepteur : $u_2 = \frac{q}{C_2}$ (3) avec $i = \frac{dq}{dt}$

- Des relations (2) et (3) ; on écrit : $\frac{1}{C_2} \frac{dq}{dt} + \frac{du_L}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C_2} \cdot i + \frac{du_L}{dt} = 0$ (4)

- En dérivant (4) on aura : $\frac{1}{C_2} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{d^2 u_L}{dt^2} = 0$ or $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ ou $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \cdot u_L$

- Finalement on obtient : $\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{1}{LC_2} \cdot u_L = 0$



2-2-1- L'énergie totale du circuit LC_2 :

On sait que : $E_{Tot} = E_{éle} + E_{mag}$

$$E_{éle} = \frac{1}{2} C_2 \cdot u_2^2 = \frac{1}{2} C_2 \cdot u_L^2 \quad (u_2 = -u_L) \text{ et } E_{mag} = \frac{L}{2} \cdot i(t)^2 = \frac{L \cdot C_2^2}{2} \left(\frac{du_L}{dt} \right)^2 \text{ car d'après (4) : } i = -C_2 \cdot \frac{du_L}{dt}$$

Donc $E_{Tot} = \frac{1}{2} C_2 \cdot u_L^2 + \frac{L \cdot C_2^2}{2} \left(\frac{du_L}{dt} \right)^2$: cette énergie est constante, on la calcule à $t=0$:

$$E_{Tot} = \frac{1}{2} C_2 \cdot u_L^2(0) + \frac{L \cdot C_2^2}{2} \left(\frac{du_L}{dt} \right)_{t=0}^2$$

et d'après le graphe de la figure3 on trouve : $u_L(0) = -8V$ et $\left(\frac{du_L}{dt} \right)_{t=0} = 0$

$$A.N : E_{Tot} = \frac{1}{2} C_2 \cdot u_L^2(0) = \frac{1}{2} \times 2.10^{-6} \times (-8)^2 = 6.4 \cdot 10^{-5} J = 64 \mu J$$

2-2-2- Calcul de l'énergie magnétique à $t=2,7ms$:

On sait que : $E_{mag} = E_{Tot} - E_{éle}$ ou bien $E_{mag} = E_{Tot} - E_{éle} = E_{Tot} - \frac{1}{2} C_2 \cdot u_L^2$

$$\text{Donc } E_{mag}(2,7ms) = E_{Tot} - \frac{1}{2} C_2 \cdot u_L^2(2,7ms) \Rightarrow E_{mag}(2,7ms) = 6,4 \cdot 10^{-5} - \frac{1}{2} \times 2.10^{-6} \times (4,8)^2 \approx 4,1 \cdot 10^{-5} J = 41 \mu J$$

Partie II : Etude de la qualité d'une modulation d'amplitude

1- Expression du taux de modulation m :

On a la tension de sortie : $u(t) = A \cdot \left[\frac{m}{S_m} \cdot s(t) + 1 \right] \cdot \cos(2\pi f_p \cdot t)$ avec $s(t) = S_m \cdot \cos(2\pi f_S \cdot t)$

Alors : $u(t) = A \cdot \underbrace{\left(m \cdot \cos(2\pi f_S \cdot t) + 1 \right)}_{\text{amplitude}} \cdot \cos(2\pi f_p \cdot t)$; d'où l'amplitude est : $U(t) = A \cdot \left(m \cdot \cos(2\pi f_S \cdot t) + 1 \right)$

* Si $\cos(2\pi f_S \cdot t) = 1 \Rightarrow U_{\max} = A \cdot (m + 1)$ (1)

* Si $\cos(2\pi f_S \cdot t) = -1 \Rightarrow U_{\min} = A \cdot (-m + 1)$ (2)

En faisant le rapport de (1) / (2) ; on aura : $\frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{A \cdot (m + 1)}{A \cdot (-m + 1)} \Rightarrow U_{\max} \cdot (1 - m) = U_{\min} \cdot (1 + m)$

Après le calcul on aboutit à la relation : $m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$

2- * Détermination de f_p , f_s et m :

D'après le graphe de la figure 5 :

$$- 16.T_p = 5 \times 20.10^{-6} \Rightarrow f_p = \frac{1}{T_p} = \frac{16}{5 \times 20.10^{-6}} = 16.10^4 \text{ Hz} = 160 \text{ kHz}$$

$$- T_s = 5 \times 20.10^{-6} \Rightarrow f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{5 \times 20.10^{-6}} = 10^4 \text{ Hz} = 10 \text{ kHz}$$

$$- m = \frac{3 \times 1 - 1 \times 1}{3 \times 1 + 1 \times 1} = 0,5$$

*** Conclusion :**

On constate que les deux conditions sont réalisées : $m = 0,5 < 1$ et $f_s = 10 \text{ kHz} \ll f_p = 160 \text{ kHz}$

Donc la modulation d'amplitude dans ce cas est bonne.

LA MECANIQUE :

PARTIE I: Etude de l'influence des champs électrique et magnétique sur des électrons

1- Première expérience :

1-1- Equation de la trajectoire:

- Système à étudier : {Un électron(m, e)}

- Repère d'étude R ($O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

* Action de la force électrique : $\vec{F}_e = -e\vec{E}$

* L'intensité du poids de l'électron est négligeable devant celle de la force électrique.

- La 2^{ème} loi de newton donne : $\vec{F}_e = m\vec{a}_G$ ou bien $m\vec{a}_G = -e\vec{E}$

- Projection de cette relation vectorielle sur chacun des deux axes Ox et Oy :

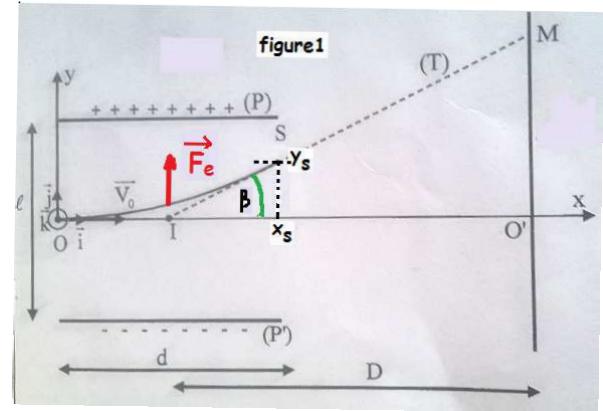
$$\begin{cases} m.a_x = -e.E_x = 0 \quad (\text{car } E_x = 0) \\ m.a_y = -e.E_y = e.E \quad (\text{car } E_y = -E = -\frac{U}{\ell}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 & ; \text{avec } a_x = dv_x/dt \\ a_y = \frac{eU}{m\ell} & ; \text{avec } a_y = dv_y/dt \end{cases}$$

- Par intégration et en tenant compte de la condition initiale : ($v_x = v_0$ et $v_y = 0$) ; on aura:

$$\begin{cases} v_x = v_0 & ; \text{avec } v_x = dx/dt \\ v_y = \frac{eU}{m\ell} \cdot t & ; \text{avec } v_y = dy/dt \end{cases}$$

- Par intégration et en tenant compte de la condition initiale : ($x_0 = 0$ et $y_0 = 0$) ; on aura:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = \frac{eU}{2m\ell} \cdot t^2 \end{cases} , \text{ alors } \begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y(x) = \frac{eU}{2m\ell} \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \end{cases} \text{ qui donne l'équation de la trajectoire : } y(x) = \frac{eU}{2m\ell v_0^2} \cdot x^2$$



1-2- Déviation électrique $O'M$:

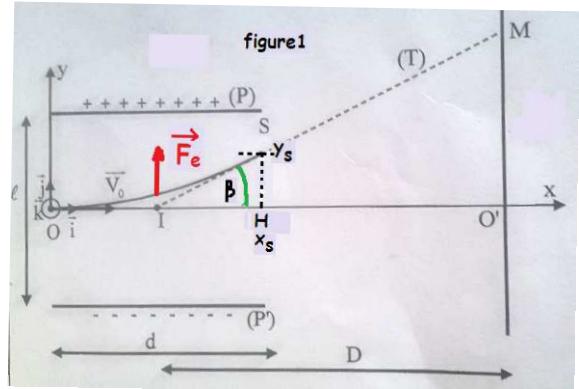
Sur la figure 1 ci-contre, on a :

$$\tan(\beta) = \frac{O'M}{O'I} = \frac{HS}{HI} \Rightarrow \frac{O'M}{D - \frac{d}{2}} = \frac{y(d)}{\frac{d}{2}}$$

$$\Rightarrow O'M = (D - \frac{d}{2}) \times \frac{\frac{eU}{2m\ell v_0^2} \cdot d^2}{\frac{d}{2}}$$

$$\Rightarrow O'M = (D - \frac{d}{2}) \times \frac{eUd}{m\ell v_0^2} \quad \text{et avec } D = 30\text{cm} > \frac{d}{2} = 3\text{cm} \quad ,$$

on obtient : $O'M \approx \frac{eUDd}{m\ell v_0^2}$



2- Deuxième expérience :

2-1- Sens du vecteur champ magnétique \vec{B} :

Les électrons frappent l'écran en O' ; pour cela la force magnétique \vec{F}_m est verticale vers le bas, or $\vec{F}_m = -e \cdot \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = e \cdot \vec{B} \wedge \vec{v}_0$; donc le trièdre $(\vec{F}_m, \vec{B}, \vec{v}_0)$ est direct, et le vecteur \vec{B} sera porté par l'axe Oz dans le sens contraire de \vec{k} ; ($\vec{B} = -\vec{B} \cdot \vec{k}$; symbole $\otimes B$)

2-2- Expression de la vitesse des électrons :

On a $\|\vec{F}_m\| = \|\vec{F}_e\| \Rightarrow \left\| -e \cdot \vec{v}_0 \wedge \vec{B} \right\| = \left\| -e \cdot \vec{E} \right\| \Rightarrow v_0 \cdot B = E \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$

2-2- Expression du rapport e/m :

En utilisant la relation précédente $O'M \approx \frac{eUDd}{m\ell v_0^2}$ avec $v_0 = \frac{E}{B} = \frac{U}{\ell \cdot B}$

On écrira: $\frac{e}{m} = \frac{O'M \cdot \ell \cdot \left(\frac{U}{\ell \cdot B} \right)^2}{UDd}$ ou bien $\frac{e}{m} = \frac{O'M \cdot U}{D \cdot d \cdot \ell \cdot B^2}$

A.N: $\frac{e}{m} = \frac{5,4 \cdot 10^{-2} \times 1200}{30 \cdot 10^{-2} \times 6 \cdot 10^{-2} \times 2 \cdot 10^{-2} \times (1,01 \cdot 10^{-3})^2} \approx 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$

PARTIE II : Etude du mouvement d'un pendule élastique

1- Les frottements sont négligeables :

1-1- Détermination de l'allongement $\Delta\ell_0 = L_{eq} - L_0$:

A l'équilibre : $\vec{T}_0 + \vec{P} = \vec{0}$, et par projection sur l'axe vertical Oz , on aura :

$T_{0z} + P_z = 0$, alors $-k \cdot \Delta\ell_0 + m \cdot g = 0$ d'où $\Delta\ell_0 = \frac{m \cdot g}{k}$

1-2- Equation différentielle que vérifie la côte $\ddot{z}(t)$:

- Système à étudier : {corps S}
- Repère d'étude R ($O ; \vec{k}$) supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures :

* Poids du corps S : \vec{P}

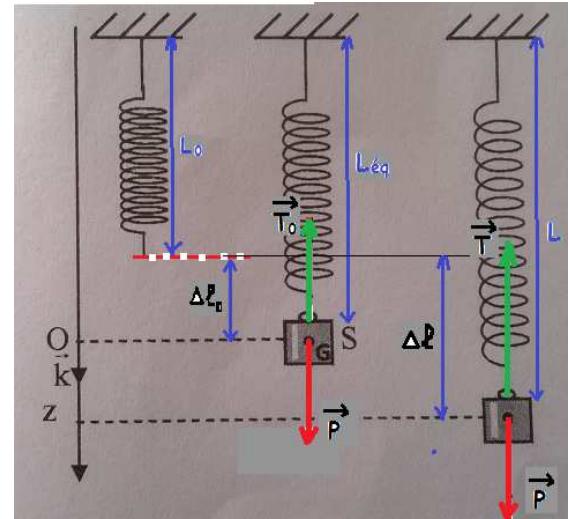
* Action du ressort : \vec{T}

- La 2^{ème} loi de newton donne : $\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$;

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oz :

$$P - T = m \cdot a_z \Rightarrow mg - K(\Delta\ell_0 + \ddot{z}) = m \cdot \ddot{z}$$

$$\Rightarrow \underbrace{mg - K \cdot \Delta\ell_0}_{=0} - K \cdot \ddot{z} = m \cdot \ddot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{K}{m} \cdot \ddot{z} = 0 \quad (1)$$



1-3- Valeur de K et V_{0z} :

* Valeur de la raideur K :

- La solution de cette équation est : $z(t) = z_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$ et $\ddot{z}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 z_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad (2)$

- En comparant (1) et (2) ; on déduit que : $\frac{K}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$, alors $K = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$

$$A.N : K = 0,2 \times \frac{4 \times \pi^2}{0,4^2} = 50 N.m^{-1}$$

* Valeur de la vitesse initiale V_{0z} :

$$On a : \dot{z}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} z_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ et } V_{0z} = \dot{z}(0) = -\frac{2\pi}{T_0} z_m \cdot \sin(\varphi) < 0 \text{ (voir le graphe 3)}$$

$$On a également : z_0 = z_m \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \cos^2(\varphi) = \left(\frac{z_0}{z_m}\right)^2 \Rightarrow \sin(\varphi) = \sqrt{1 - \left(\frac{z_0}{z_m}\right)^2} \quad (car \sin(\varphi) > 0)$$

$$Finalement on aura l'expression : V_{0z} = -\frac{2\pi}{T_0} z_m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{z_0}{z_m}\right)^2} \text{ ou bien } V_{0z} = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot \sqrt{z_m^2 - z_0^2}$$

$$A.N : V_{0z} = -\frac{2\pi}{0,4} \times \sqrt{(4 \cdot 10^{-2})^2 - (2 \cdot 10^{-2})^2} \approx -0,54 \text{ m.s}^{-1}$$

1- Les frottements ne sont pas négligeables :

2-1- La correspondance :

- La courbe(1) correspond au régime pseudo-périodique ;
- La courbe(2) correspond au régime apériodique.

2-2-1- Expression de l'énergie potentielle E_p :

- L'énergie potentielle totale est : $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ (*)

- L'énergie potentielle de pesanteur est : $E_{pp} = -m.g.\mathbf{\bar{z}} + C$

Or en $z=0$ on a $E_{pp}=0$ donc $C=0$; d'où $E_{pp} = -m.g.\mathbf{\bar{z}}$ (1)

- L'énergie potentielle élastique est : $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta\ell^2 + C'$

Or lorsque $\Delta\ell=0$ on a $E_{pe}=0$ donc $C'=0$; d'où $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta\ell^2$ (2)

- On porte (1) et (2) dans (*), on aura :

$$E_p = -m.g.\mathbf{\bar{z}} + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta\ell^2, \text{ avec } \Delta\ell = \Delta\ell'_0 + \mathbf{\bar{z}}$$

$$\text{On écrira : } E_p = -m.g.\mathbf{\bar{z}} + \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta\ell'_0 + \mathbf{\bar{z}})^2 = \underbrace{(-m.g + K \cdot \Delta\ell'_0)}_{=0 \text{ (à l'équilibre)}} \cdot \mathbf{\bar{z}} + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \mathbf{\bar{z}}^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta\ell'_0)^2$$

$$\text{Finalement on aboutit à l'expression : } E_p = \frac{1}{2} K \cdot \mathbf{\bar{z}}^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta\ell'_0)^2$$

2-2-2- Calcul de la variation de l'énergie mécanique ΔE_m :

Dans le cas du régime pseudo-périodique :

$$\Delta E_m = \Delta E_p + \Delta E_c$$

$$\Rightarrow \Delta E_m = \frac{1}{2} K \cdot (\mathbf{\bar{z}}_2^2 - \mathbf{\bar{z}}_1^2) + \frac{1}{2} m \cdot (\underbrace{\dot{\mathbf{\bar{z}}}_2^2}_{=0} - \underbrace{\dot{\mathbf{\bar{z}}}_1^2}_{=0})$$

$$\Rightarrow \Delta E_m = \frac{1}{2} K \cdot (\mathbf{\bar{z}}_2^2 - \mathbf{\bar{z}}_1^2)$$

$$\text{A.N : } \Delta E_m = \frac{1}{2} \times 50 \times \left((2,2 \cdot 10^{-2})^2 - (3 \cdot 10^{-2})^2 \right) \approx -1,04 \cdot 10^{-2} J$$