

## Probabilités



**Exercice1 :** Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien Ya-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

**Solution :** Notons E ; H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués.

L'énoncé donne:

$\text{card}(E)=800$ ,  $\text{card}(H)=300$ ,  $\text{card}(S)=352$ ,  
 $\text{card}(M)=424$ ,  $\text{card}(H \cap S)=188$ ,  $\text{card}(H \cap M)=166$   
 $\text{card}(S \cap M)=208$ ,  $\text{card}(H \cap M \cap S)=144$

On cherche :  $\text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$

où  $\overline{A}$  désigne le complémentaire de A dans E .  
D'après les lois de Morgan

$$\text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = \text{card}(\overline{H \cup M \cup S})$$

applique la formule du crible de Poincaré :  
 $\text{card}(H \cup M \cup S) = \text{card}(H) + \text{card}(M) + \text{card}(S) - \text{card}(H \cap M) - \text{card}(H \cap S) - \text{card}(M \cap S) + \text{card}(H \cap M \cap S)$

On en déduit :

$$\text{card}(H \cup M \cup S) = 658$$

$$\text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = 800 - 658 = 142$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées

**Exercice2 :** Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.

On tire 2 boules de l'urne simultanément

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?
3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

**Solution :1)** Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de

7 éléments (simultanément) donc le nombre de tirages possibles est :  $C_7^2 = \frac{A_7^2}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

**2)** pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair il suffit de tirer 2 boules pairs **ou** tirer 2 boules impairs

Donc : le nombre est :

$$C_4^2 + C_3^2 = \frac{A_4^2}{2!} + \frac{A_3^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} + \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 6 + 3 = 9$$

Car il ya 3 boules pairs et 4 boules impairs

**3)** pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair il suffit de tirer une boule paire **et** tirer une boule impaire :

Donc : le nombre est :  $C_4^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 = 12$

**Exercice3 :** Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

- 1) 1-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
- 1-2) Combien Ya-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
- 1-3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
- 1-4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
- 2) Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
- 2-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
- 2-2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
- 2-3) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

**Solution :1)** 1-1) Il y a  $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$  codes possibles.

1-2) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc  $9 \times 9 \times 4 = 324$  tels codes.

1-3) On va compter par différence. Il y a  $8 \times 8 \times 8$  codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc  $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$  codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

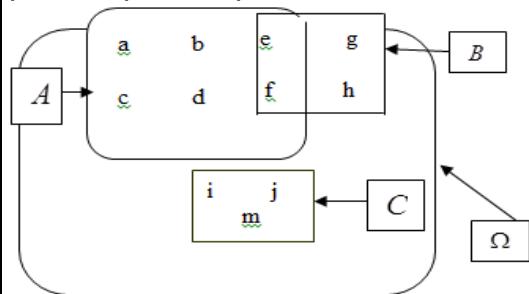
1-4) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc  $3 \times 8 \times 8 = 192$  tels codes.

2) 2-1) On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc  $9 \times 8 \times 7 = 504$  choix possibles

2-2) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc  $8 \times 7 \times 5 = 280$  tels codes

2-3) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de  $8 \times 7 \times 3 = 168$ .

**Exercice4 :** le diagramme suivant représente la répartition des élèves d'une classe suivant leur préoccupation sportive



A Pratiquent le football

B Pratiquent le basket-ball

C Pratiquent le Rugby

On choisit au Hazard un élève de cette classe

1) écrire en extension les événements suivants :

$A$  ;  $B$  ;  $C$  ;  $\Omega$  ;  $\bar{A}$  ;  $\bar{C}$  ;  $A \cap B$  ;  $A \cup B$  ;  $A \cap C$  et  $A \cup C$

2) calculer :  $P(A)$  ;  $P(B)$  ;  $P(C)$  ;  $P(A \cap B)$  ;

$P(A \cup B)$  ;  $P(A \cap C)$  ;  $P(A \cup C)$  ;  $P(\bar{A})$  ;  $P(\bar{C})$

3) comparer :  $1 - p(A)$  et  $p(\bar{A})$

$1 - p(C)$  et  $p(\bar{C})$

4)a) vérifier que :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) vérifier que :  $P(A \cap C) = P(A) + P(C)$

c) vérifier que :  $P(C) = P(\{i\}) + P(\{j\}) + P(\{m\})$

**Solutions :** 1)  $A = \{a; b; c; d; e; f\}$  et  $B = \{e; f; g; h\}$

et  $C = \{i; j; m\}$  et  $\Omega = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; m\}$

$\bar{A} = \{g; h; i; j; m\}$  et  $\bar{C} = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$

$A \cap B = \{e; f\}$  et  $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$

Et  $A \cap C = \emptyset$  et  $A \cup C = \{a; b; c; d; e; f; i; j; m\}$

2)  $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{6}{11}$  et  $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{4}{11}$

$$p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{3}{11} \text{ et } p(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card\Omega} = \frac{2}{11}$$

$$p(A \cup B) = \frac{Card(A \cup B)}{Card\Omega} = \frac{8}{11} \text{ et } p(A \cap C) = \frac{Card(A \cap C)}{Card\Omega} = \frac{0}{11} = 0$$

$$p(A \cup C) = \frac{Card(A \cup C)}{Card\Omega} = \frac{9}{11} \text{ et } p(\bar{A}) = \frac{Card\bar{A}}{Card\Omega} = \frac{5}{11}$$

$$p(\bar{C}) = \frac{Card\bar{C}}{Card\Omega} = \frac{8}{11}$$

$$3) 1 - p(A) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} = p(\bar{A})$$

$$1 - p(C) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} = p(\bar{C})$$

$$4)a) P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{11} + \frac{4}{11} - \frac{2}{11} = \frac{8}{11} = P(A \cup B)$$

$$b) P(A) + P(C) = \frac{6}{11} + \frac{3}{11} = \frac{9}{11} = P(A \cup C)$$

$$c) P(\{i\}) + P(\{j\}) + P(\{m\}) = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11} = P(C)$$

**Exercice5 :** On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

On considère les événements suivants :

A : « On obtient un nombre impair »

B : « On obtient un multiple de 3 »

Calculer la probabilité de l'événement Au B.

**Solution :**  $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  et  $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

A  $\cap$  B est l'événement élémentaire :

« On obtient un 3 », donc :  $A \cap B = \{3\}$

$$p(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card\Omega} = \frac{1}{6}$$

On a :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\text{Donc : } P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

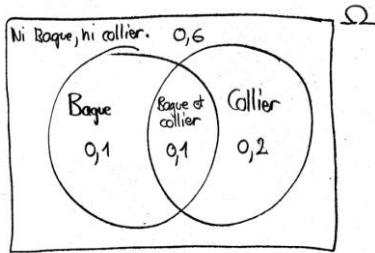
**Exercice6 :** 60% des élèves d'une école ne portent ni bague ni collier. 20% portent une bague et 30% ont un collier.

Si un des élèves est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte :

a) une bague ou un collier ?

b) une bague et un collier ?

**Solution :** Le diagramme de la situation est :



D'où on tire facilement qu'un élève tirer au hasard porte "une bague ou un collier" avec une probabilité de 0.4 et "une bague et un collier" avec une probabilité de 0.1.

On peut également résoudre le problème en utilisant l'algèbre des ensembles, soit les probabilités :

i)  $P(B)$  = probabilité de "porter une bague" = 0.20,

ii)  $P(C)$  = probabilité de "porter un collier" = 0.30,

iii)  $P(\bar{B} \cap \bar{C})$  = probabilité de l'événement "ne porte pas de bague et ne porte pas de collier (ni bague, ni collier)" = 0.60.

a) On applique la loi de Morgan à l'événement

$P(\bar{B} \cap \bar{C})$ , ce qui donne :

$$P(\bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{B \cup C})$$

$$c = 0.6 \text{ donc } P(\bar{B \cup C}) = 1 - P(B \cup C)$$

$$c = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$b) P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C)$$

$$P(B \cap C) = 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.1$$

**Exercice7 :** dans une classe de terminale 54% ont déclarer aimer le foot et 32% ont déclarer aimer le basquette et 15% ont déclarer aimer les deux sports

On choisie au hasard un élève de cette classe.

Quelle est la probabilité des événements suivants

1)  $E_1$  « l'élève aime le foot mais pas le basquette »

2)  $E_2$  « l'élève aime le foot ou le basquette ou les deux a la fois »

3)  $E_3$  « l'élève aime une seule sport »

4)  $E_4$  « l'élève n'aime ni le foot ni basquette »

**Solution :1)**

On note  $\Omega$  l'univers l' ensemble des élèves de la classe. Il y a équiprobabilité . On considére les événements suivants :

$F$  « l'élève aime le foot »

$B$  « l'élève aime le basquette »

On a donc :  $p(F) = 0,54$  et  $p(B) = 0,32$

et  $p(F \cap B) = 0,15$

on utilisant un diagramme on vérifie que :

$E_1 = F \cap \bar{B}$  : les élèves qui aiment le foot mais pas le basquette

On remarque que :  $\begin{cases} F = (F \cap \bar{B}) \cup (F \cap B) \\ (F \cap \bar{B}) \cap (F \cap B) = \emptyset \end{cases}$

$$\text{Donc : } p(F) = p(F \cap \bar{B}) + p(F \cap B)$$

$$\text{Donc : } p(F \cap \bar{B}) = p(F) - p(F \cap B)$$

$$\text{Donc : } p(F \cap \bar{B}) = 0,39 \text{ donc : } p(E_1) = 0,39$$

**2)** On a :  $E_2 = F \cup B$

$$\text{donc : } p(E_2) = p(F \cup B) = p(F) + p(B) - p(F \cap B)$$

$$\text{donc : } p(E_2) = 0,71$$

**3)** On a :  $E_3 = (F \cap \bar{B}) \cup (\bar{F} \cap B)$  et

$$(\bar{F} \cap \bar{B}) \cap (\bar{F} \cap B) = \emptyset$$

$$\text{Ainsi : } p(E_3) = p(F \cap \bar{B}) + p(\bar{F} \cap B)$$

$$\text{Et puisque : } p(\bar{F} \cap B) = p(B) - p(B \cap F)$$

$$\text{Alors : } p(\bar{F} \cap B) = 0,17 \text{ donc : } p(E_3) = 0,56$$

**4)** On a :  $E_4 = \bar{F} \cup \bar{B}$

$$p(E_4) = p(\bar{F} \cup \bar{B}) = 1 - p(F \cup B) = 0,29$$

**Exercice8 :** Une urne contient 4 boules blanches indiscernables, 3 noires, 5 rouges.

On tire simultanément trois boules de l'urne

1) déterminer : le nombre de tirages possibles :

$$\text{card}(\Omega)$$

2) déterminer la probabilité des événements suivants :

B" tirer trois boules blanches"

N "tirer trois boules noires"

R "tirer trois boules rouges"

D "d'obtenir trois boules de couleurs différentes"

M" tirer trois boules de même couleur "

E" tirer 2 boules blanches seulement"

**Solution :**

$$1) \text{ card}(\Omega) = C_{12}^3$$

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = \frac{6 \times 2 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

$$2) p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_4^3}{28} = \frac{4}{28} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

$$p(N) = \frac{\text{Card}N}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^3}{28} = \frac{1}{28} ; \quad p(R) = \frac{\text{Card}R}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_5^3}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

$$p(D) = \frac{\text{Card}D}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{28} = \frac{3 \times 4 \times 5}{220} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$$

M est l'événement contraire de D cad  $M = \overline{D}$

$$\text{Donc : } p(M) = p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

$$p(E) = \frac{\text{Card}E}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{220} = \frac{6 \times 8}{220} = \frac{12}{55}$$

**Exercice9:** Une urne contient 4 boules blanches, et 5 noires.

On tire Successivement trois boules de l'urne au hasard et sans remise

1) déterminer :le nombre de tirages possibles :

$$\text{card}(\Omega)$$

2) déterminer la probabilité des événements suivants :

B" tirer trois boules blanches"

N "tirer trois boules noirs"

M" tirer trois boules de même couleur "

D "d'obtenir trois boules de couleurs différentes»

E" tirer 2 boules blanches seulement»

**Solution :1)**  $\text{card}(\Omega) = A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

2)

1ere tirage	2ere tirage
B	$\overline{B}$

1ere tirage	2ere tirage
$\overline{B}$	B

$$p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} =$$

$$= \frac{A_4^3}{504} = \frac{4 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 3 \times 8 \times 7} = \frac{1}{3 \times 7} = \frac{1}{21}$$

$$p(N) = \frac{\text{Card}N}{\text{Card}\Omega} = \frac{A_5^3}{504} = \frac{5 \times 4 \times 3}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7} = \frac{5}{3 \times 2 \times 7} = \frac{5}{42}$$

$$p(M) = \frac{\text{Card}M}{\text{Card}\Omega} = \frac{A_4^3 + A_5^3}{504} = \frac{4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3}{504} = \frac{24 + 60}{504} = \frac{84}{504} = \frac{1}{6}$$

D est l'événement contraire de M cad  $D = \overline{M}$

$$\text{Donc : } p(D) = p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Calcul de la probabilité de l'événement E

On a 3 cas possibles :

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
$\overline{B}$	B	B

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
B	B	$\overline{B}$

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
B	$\overline{B}$	B

$$p(E) = \frac{3A_4^2 \times A_5^1}{9 \times 8 \times 7} = \frac{3 \times 4 \times 3 \times 5}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{14}$$

**Exercice10 :** Une urne contient 3 boules blanches, et 4 noires.

On tire Successivement deux boules de l'urne au hasard avec remise

1) déterminer :le nombre de tirages possibles 2)

2) déterminer la probabilité des événements suivants :

B" tirer deux boules blanches"

N "tirer deux boules noirs»

M" tirer deux boules de même couleur "

D "d'obtenir deux boules de couleurs différentes»

E" tirer une boule blanche seulement»

**Solution :1)**  $\text{card}(\Omega) = 7 \times 7 = 7^2 = 49$

$$2) p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{3 \times 3}{49} = \frac{9}{49}$$

$$p(N) = \frac{\text{Card}N}{\text{Card}\Omega} = \frac{4 \times 4}{7 \times 7} = \frac{16}{49}$$

$$p(M) = \frac{\text{Card}M}{\text{Card}\Omega} = \frac{3 \times 3 + 4 \times 4}{7 \times 7} = \frac{25}{49}$$

D est l'événement contraire de M cad  $D = \overline{M}$

$$\text{Donc : } p(D) = p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

Calcul de la probabilité de l'événement E

On a 2 cas possibles

$$p(E) = \frac{3 \times 4 + 3 \times 4}{42} = \frac{2 \times 3 \times 4}{7 \times 7} = \frac{24}{49}$$

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrément
Successifs Avec remise	On tient compte	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$r^p$ p-listes
Successifs Avec remise	de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$A_n^p$ arrangements
Simultanés	L'ordre n'intervient pas	qu'une seule fois	$C_n^p$ combinatoires

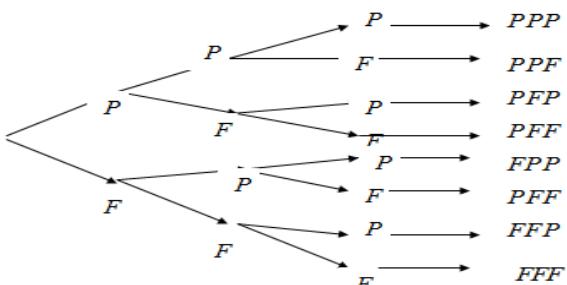
**Exercice11:**

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1) Donner la liste de tous les résultats possibles  $\Omega_3$  (exemple : PPF). (Dresser L'arbre des choix) Et calculer  $\text{card}(\Omega_3)$

2) Donner la probabilité de l'événement suivant A « le tirage ne comporte que deux Piles exactement».

**Solution :1)**



2)  $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$

$card(\Omega) = 8$

1ere fois	2ere fois	3ere fois
2	2	2

Les tirages étant équiprobables, on a :

$$p(A) = \frac{Card 4}{Card \Omega} = \frac{3}{8}$$

**Exercice 12 :** On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1°) Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables.

2°) Calculer la probabilité des événements :  
A : « on obtient un double » ; B : « on obtient 2 numéros consécutifs »

C : « on obtient au moins un 6 » ; D : « la somme des numéros dépasse 7 ».

**Exercice 13:** On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

1°) Dresser la liste des issues équiprobables.

2°) Quel est l'événement le plus probable :

A ou B ?

A : « 2 piles et 2 faces »

B : « 3 piles et 1 face »

Variables aléatoires

**Exercice 14 :** Une urne contient 5 boules

blanches : tel que 2 boules portent le numéro 1 et 3 boules portent le numéro 2

Et l'urne contient aussi 7 boules noires dont 4 boules portent le numéro 1 et 3 boules portent le numéro 2 et toutes les Boules sont indiscernables

On tire de l'urne au hasard une Boule

On considère les événements suivants :

N « On obtient une Boule noire »

B « On obtient une Boule blanche »

U « La Boule porte le numéro 1 »

D « La Boule porte le numéro 2 »

1) Donner la probabilité des événements suivants :

B ; N ; U ; D ; B ∩ U ; N ∩ D

2) a) sachant que La Boule tirée est blanche quelle est la probabilité pour qu'elle porte le numéro 1 on la note :  $P_B(U)$

b) comparer :  $P_B(U)$  et  $\frac{P(B \cap U)}{P(B)}$

3) a) sachant que La Boule tirée est noire quelle est la probabilité pour qu'elle porte le numéro 2 on la note :  $P_N(D)$

b) comparer :  $P_N(D)$  et  $\frac{P(D \cap N)}{P(N)}$

4) a) sachant que La Boule tirée porte le numéro 1 quelle est la probabilité pour qu'elle soit blanche on la note :  $P_U(B)$

b) comparer :  $P_U(B)$  et  $\frac{P(U \cap B)}{P(U)}$

**Solution : 1)**  $card(\Omega) = 12$  ;  $P(D) = \frac{7}{12}$  ;  $P(U) = \frac{5}{12}$

$P(B) = \frac{5}{12}$  ;  $P(N) = \frac{7}{12}$  ;  $P(B \cap U) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P(N \cap D) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

2) a)  $P_B(U) = \frac{2}{5}$  2) b)  $\frac{P(B \cap U)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5} = P_B(U)$

3) a)  $P_N(D) = \frac{4}{7}$  3) b)  $\frac{P(D \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7} = P_N(D)$

4) a)  $P_U(B) = \frac{2}{5}$  4) b)  $\frac{P(U \cap B)}{P(U)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{7} = P_U(B)$

Remarque :  $\frac{P(D \cap N)}{P(N)} = P_N(D) \Leftrightarrow P(N \cap D) = P(N)P_N(D)$

**Exercice 15 :** Une urne contient 9 boules dont 5 noires numérotées : 1 ; 1 ; 2 ; 2 et 4 boules blanches numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2

Sachant que La Boule tirée porte le numéro 1 quelle est la probabilité pour qu'elle soit noire **Solution :** on la note :  $P_U(N)$

on a :  $P_U(N) = \frac{P(U \cap N)}{P(N)}$

$P(U \cap N) = \frac{3}{9}$  et  $P(N) = \frac{5}{9}$  donc  $P_U(N) = \frac{3}{5}$

**Exercice 16:** on dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$

L'urne  $U_1$  contient 2 boules rouges et 3 boules vertes et L'urne  $U_2$  contient 2 boules rouge et 2 boules vertes .

On choisit au Hazard une urne et on tire une boule

On considère les événements suivants :

$A_1$  : « le choix de L'urne  $U_1$  »

$A_2$  : « le choix de L'urne  $U_2$  »

$V$  : « tirer une boule verte »

calculer les probabilités des événements suivants

$V \cap A_1$  et  $V \cap A_2$

$$\text{Solution : } P(V \cap A_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(V) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P(V \cap A_2) = P(A_2) \times P_{A_2}(V) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

**Exercice 17:** une urne contient 25 boules dont 15 boules blanches et 10 boules noires.

On tire au Hazard une boule de l'urne puis on tire une autre boule sans remettre la première

1) Sachant que La première Boule tirée est blanche quelle est la probabilité pour que la deuxième soit blanche aussi

2) Sachant que La première Boule tirée est noire quelle est la probabilité pour que la deuxième soit noire aussi

3) quelle est la probabilité des événements suivants

$E$  « On obtient deux Boules blanches »

$F$  « On obtient deux Boules noires »

$G$  « On obtient deux Boules de couleurs différentes »

**Solution :** On considère les événements suivants :

$B_1$  : « La première Boule tirée est blanche »

$B_2$  : « La deuxième Boule tirée est blanche »

$N_1$  : « La première Boule tirée est noire»

$N_2$  : « La deuxième Boule tirée est noire»

$$1) P_{B_1}(B_2) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \quad 2) P_{N_1}(N_2) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$3) E = B_1 \cap B_2 \quad P(B_1 \cap B_2) = ?$$

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{15}{25} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{20}$$

$$F = N_1 \cap N_2 \quad P(N_1 \cap N_2) = ?$$

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = \frac{10}{25} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$$

$$G = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$$

$$p(G) = p(B_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap B_2)$$

$$p(G) = p(B_1) \times P_{B_1}(N_2) + p(N_1) \times P_{N_1}(B_2)$$

$$p(G) = \frac{3}{5} \times \frac{10}{24} + \frac{2}{5} \times \frac{15}{24} = \frac{1}{2}$$

**Exercice 18:** on dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$

L'urne  $U_1$  contient 2 boules rouges et 3 boules noires et L'urne  $U_2$  contient 3 boules rouge et 4 boules noires.

On choisit au Hazard une urne et on tire une boule

On considère les événements suivants :

$A_1$  : « le choix de L'urne  $U_1$  »

$A_2$  : « le choix de L'urne  $U_2$  »

$R$  : « tirer une boule rouge »

Calculer la probabilité de tirer une boule rouge

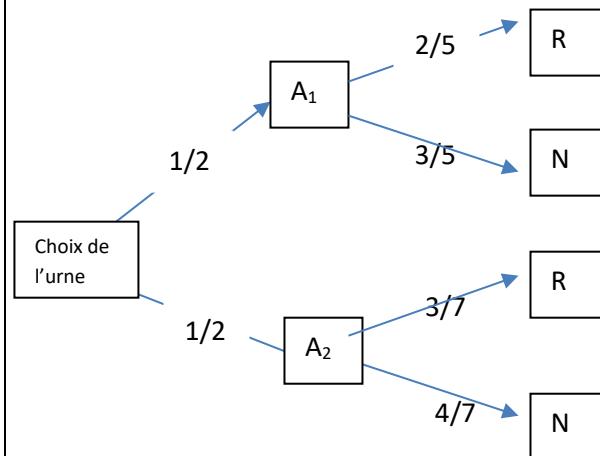
**Solution :** calculons  $P(R)$  ?

$A_1$  et  $A_2$  forment une partition de  $\Omega$

D'après la loi de probabilités totales on a :

$$P(R) = P(A_1) \times P_{A_1}(R) + P(A_2) \times P_{A_2}(R)$$

$$P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{29}{70}$$



**Exercice19:** une urne contient des jetons de trois couleurs : 50% de jetons sont rouges et  $\frac{1}{3}$  de jetons sont vertes et  $\frac{1}{6}$  de jetons sont jaunes .

50% de jetons rouges portent le numéros 1 et 30% de jetons vertes portent le numéros 1 et 40% de jetons jaunes portent le numéros 1 et les autres jetons portent le numéros 2

1) Calculer la probabilité de tirer un jeton qui porte le numéros 1

2) Calculer la probabilité de tirer un jeton rouge sachant qu'elle porte le numéros 1

**Solution :**

On tire un jeton de l'urne au Hazard

On considère les événements suivants :

$R$  : « le jeton est rouge »

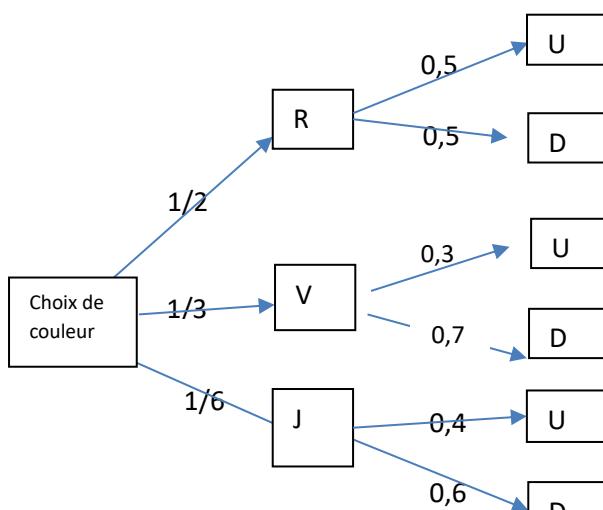
$V$  : « le jeton est vert »

$J$  : « le jeton est jaune »

$U$  : « le jeton porte le numéros 1 »

$D$  : « le jeton porte le numéros 2 »

on utilise une Arbre pondéré



1) Les événements :  $R$  et  $V$  et  $J$  forment une partition de l'univers  $\Omega$

D'après la loi de probabilités totales on a :

$$P(U) = P(R) \times P_R(U) + P(V) \times P_V(U) + P(J) \times P_J(U)$$

Puisque on a :  $P(R) = \frac{1}{2}$  et  $P(V) = \frac{1}{3}$  et  $P(J) = \frac{1}{6}$

et  $P_R(U) = 50\% = 0,5$  et  $P_V(U) = 30\% = 0,3$  et

$$P_J(U) = 40\% = 0,4$$

$$\text{alors : } P(U) = \frac{0,5}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,4}{6} = \frac{5}{12}$$

2) Calculons la probabilité de tirer un jeton rouge sachant qu'elle porte le numéros 1

On va calculer :  $P_U(R) = ?$

$$P_U(R) = \frac{P(R \cap U)}{P(U)}$$

$$\text{Or : } P(R \cap U) = P(R) \times P_R(U) = \frac{1}{2} \times 0,5 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc : } P_U(R) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$$

**Exercice20:** Dans un lycée il y a 4 classes de terminale ES avec 4 professeurs :

$M_1, M_2, M_3, M_4$ .

Lors des devoirs communs les élèves constatent que la probabilité qu'un sujet sur les suites « Tombe » dépend du professeur rédacteur du devoir et Ils savent que :

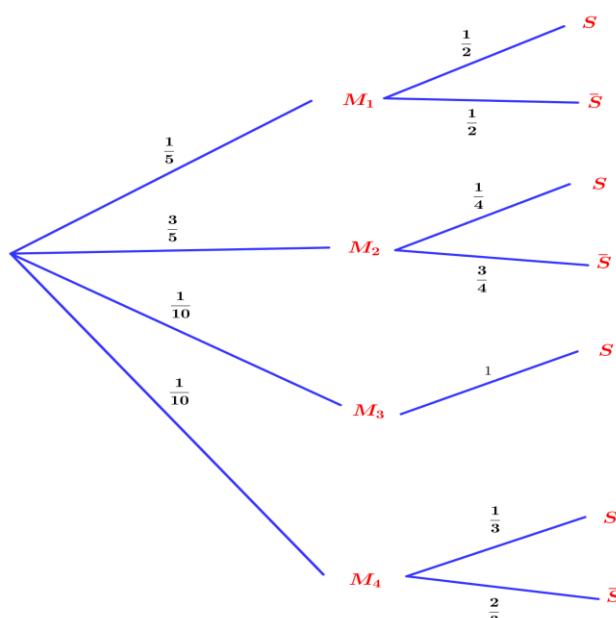
- $M_1$  rédige le devoir 1 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 2
- $M_2$  rédige le devoir 3 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 4
- $M_3$  rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est toujours présent
- $M_4$  rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 3

On appelle :  $M_i$  l'événement « le rédacteur du sujet est le professeur  $M_i$  »

$S$  l'événement « le sujet sur les suites est présent dans le devoir »

Calculer la probabilité de  $S$

**Solution :** Arbre pondéré :



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
 p(S) &= p(M_1)P_{M_1}(S) + p(M_2)P_{M_2}(S) + \\
 &+ p(M_3)P_{M_3}(S) + p(M_4)P_{M_4}(S) \\
 p(S) &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times 1 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{23}{60}
 \end{aligned}$$

**Exercice 21:** On considère des sacs de billes  $S_1, S_2, S_3, \dots$  tels que  $S_1$  contient 3 billes jaunes et 2 billes vertes.

Chacun des sacs suivants  $S_2, S_3, \dots$  contient 2 billes jaunes et 2 billes vertes.

On tire au hasard une bille de  $S_1$  et on la met dans  $S_2$ .

Puis on tire une bille de  $S_2$  et on la met dans  $S_3$ .  
Et ainsi de suite.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $E_n$  l'« événement « la bille tirée dans  $S_n$  est verte » et  $P(E_n)$  sa probabilité.

1) déterminer  $P(E_1)$ ,  $P_{E_1}(E_2)$ ,  $P_{\bar{E}_1}(E_2)$  et  $P(E_2)$

2) A l'aide d'un arbre pondéré, exprimer  $P(E_{n+1})$  en fonction de  $P(E_n)$

3) Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_1 = 0,4$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,4$ .

a) démontrer que la suite  $(u_n)$  est majorée par 0,5.

b) démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

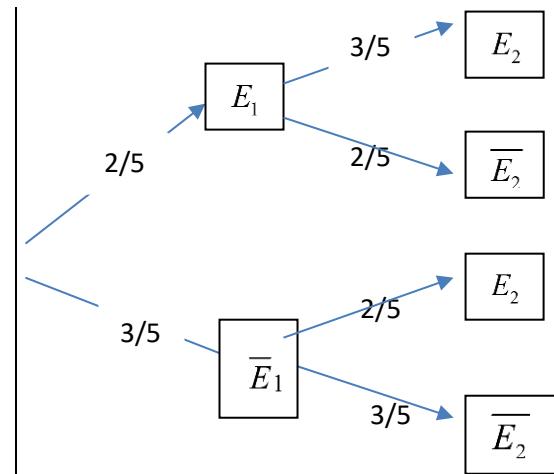
c) Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite

**Solution :** 1) On est dans une situation

d'équiprobabilité donc :  $P(E_1) = \frac{2}{5}$

$$P_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5} \text{ (Sachant } E_1 \text{)}$$

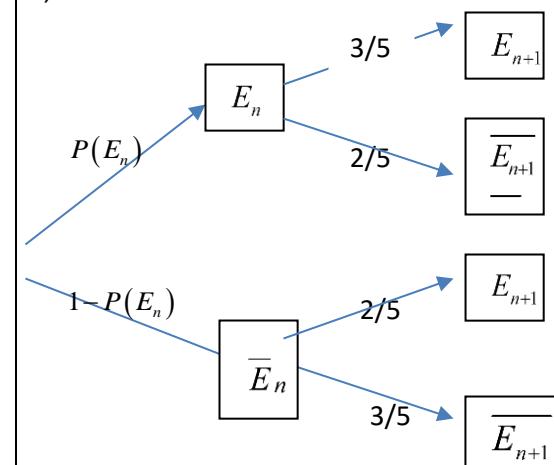
$$P_{\bar{E}_1}(E_2) = \frac{2}{5} \text{ (Sachant } \bar{E}_1 \text{)}$$



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$P(E_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

2)



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times \frac{3}{5} + (1 - P(E_n)) \times \frac{2}{5}$$

$$P(E_{n+1}) = \frac{3}{5}P(E_n) + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}P(E_n)$$

$$P(E_{n+1}) = \frac{1}{5}P(E_n) + \frac{2}{5}$$

$$P(E_{n+1}) = 0,2P(E_n) + 0,4 \quad n \geq 1$$

3) a) démontrons que  $u_n \leq 0,5 \quad \forall n \geq 1$

On a  $u_1 = 0,4 \leq 0,5$  donc vraie pour  $n=1$

Supposons que :  $u_n \leq 0,5$

Montrons que :  $u_{n+1} \leq 0,5$  ?

On a :  $0,2u_n \leq 0,1$  donc :  $0,2u_n + 0,4 \leq 0,5$

Donc :  $\forall n \geq 1 \quad u_n \leq 0,5$

3) b) Montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante

$$u_{n+1} - u_n = 0,2u_n + 0,4 - u_n = -0,8u_n + 0,4$$

Or  $u_n \leq 0,5$  donc  $-0,8u_n \geq -0,8 \times 0,5$

donc  $-0,8u_n \geq -0,4$  donc  $-0,8u_n + 0,4 \geq 0$

donc : la suite  $(u_n)$  est croissante

3)c) la suite  $(u_n)$  est croissante et puisqu'elle est majorée alors elle est convergente

Sa limite  $l$  vérifie :  $l = 0,2l + 0,4$ .

Donc :  $l = 0,5$

**Exercice 22:** On lance une fois un dé cubique équilibré.

On considère les événements suivants :

A : « on obtient un nombre pair »

B : « on obtient un multiple de 3 »

1) calculer les probabilités

des événements suivants : A ; B ;  $A \cap B$ ;  $P_B(A)$

2) comparer :  $p(A \cap B)$  et  $p(A) \times p(B)$

**Solution : 1)**  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  et  $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$A \cap B$  "obtenir un nombre pair et un multiple de 3"

Donc :  $A \cap B = \{6\}$  donc :  $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$2) p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = p(A \cap B)$$

On dira que les événements A et B sont indépendants

**Exercice 23:** on écrit les entiers de 1 à 20 sur vingt cartons

On tire au hasard un carton

Soient les événements suivants :

A : « on obtient un nombre impair »

B : « obtenir un multiple de 5 »

1) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Et événements A et B sont-ils incompatibles ?

2) même question mais cette fois-ci on rajoute un carton numéroté 21

**Solution : 1)** L'univers des éventualités est :

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 20\}$ .

$A = \{1 ; 3 ; 5 ; \dots ; 19\}$ .  $B = \{5 ; 10 ; 15 ; 20\}$ .

$A \cap B = \{5 ; 15\}$ .

On est dans une situation d'équiprobabilité donc :

$$P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ et } P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$p(A \cap B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = p(A \cap B)$$

Donc les événements A et B sont indépendants  $A \cap B = \{5 ; 15\} \neq \emptyset$

Donc les événements A et B sont compatibles

$$2) \Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 20 ; 21\}$$

$$A = \{1 ; 3 ; 7 ; \dots ; 19 ; 21\} \text{ et } B = \{5 ; 10 ; 15 ; 20\}$$

$A \cap B = \{5 ; 15\} \neq \emptyset$  Donc les événements A et B sont compatibles

$$P(A) = \frac{11}{21} \text{ et } P(B) = \frac{4}{21} \text{ et on a } p(A \cap B) = \frac{2}{21}$$

$$p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$$

Donc les événements A et B sont dépendants

**Exercice 24:** On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré.

Soient les événements suivants :

A : « on obtient le numéro 6 au 1ere lancement »

B : « on obtient le numéro 6 au 2ere lancement »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

**Solution :** sans faire les calculs les 2

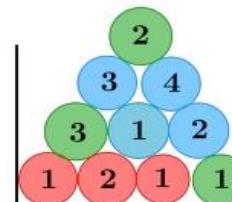
événements A et B sont indépendants car le 2ere lancement ne dépend pas du 1ere lancement en effet :

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ et } P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{36} \text{ donc } p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Donc : les 2 événements A et B sont indépendants

**Exercice 25:** Dans l'urne ci-contre :



Il y a des jetons numérotés de différentes couleurs. On tire au hasard un jeton dans cette urne et on considère les événements suivants : B : le jeton tiré est bleu

I : le numéro du jeton tiré est impair

1) Les événements B et I sont-ils indépendants ?

2) Combien faut-il rajouter de jetons bleus numérotés 1 pour que les événements B et I

soient indépendants ?

**Solution :** 1) on est dans une situation d'équiprobabilité donc :

$$P(I) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ et } P_B(I) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc :  $P_B(I) \neq P(I)$  donc Les évènements B et I sont dépendants

2) soit n : le nombre de jetons bleus numérotés 1 rajouter

$$P(I) = \frac{6+n}{n+10} \text{ et } P_B(I) = \frac{n+2}{n+4}$$

B et I sont indépendants  $\Leftrightarrow P_B(I) = P(I)$

$$\Leftrightarrow \frac{6+n}{n+10} = \frac{n+2}{n+4} \Leftrightarrow (6+n)(n+4) = (10+n)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 10n + 24 = n^2 + 12n + 20$$

$$\Leftrightarrow 4 = 2n \Leftrightarrow n = 2$$

**Exercice 26:** On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons : trois rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jaunes numérotés 1 et 2, et un bleu numéroté 1. On désigne respectivement par R, U et D les événements :

« le jeton est rouge », « le numéro est 1 » et « le numéro est 2 ».

Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?

**Exercice 27:** (notion de variable aléatoire)

Un jeu consiste à faire tourner une roue bien équilibrée

Le prix à payer pour une partie est de 2 dh  
Le jeu rapporte le montant indiqué par la roue en dh on pose :

X = gain = rapport du jeu

- prix de la partie

On dit que X est une variable aléatoire

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X

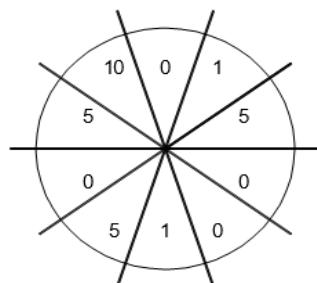
2) déterminer les probabilités associées respectivement aux valeurs possibles de X

(Mettre les résultats dans un tableau)

3) déterminer  $p(X \leq 0)$  et  $p(X > 0)$

4) déterminer  $E(X)$  l'espérance de X donnée par

$$: E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p(X = x_i)$$



où les  $x_i$  sont les valeurs possibles pour X et pi les probabilités respectivement associées.

Interpréter cette valeur.

5) déterminer la variance  $V(X)$  et l'écart type  $\sigma(X)$  de X donnés par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i^2 - (E(X))^2 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

6) le jeu est à gain positif si  $E(X) > 0$ , qu'en est-il de ce jeu ? est-il plus favorable à l'organisateur ou au joueur ?

7) déterminer le prix de la partie pour que l'espérance soit nulle.

**Solution :** 1) les valeurs possibles pour X : sont  $10-2=8 \quad 5-2=3 \quad 1-2=-1 \quad 0-2=-2$

$$\text{Donc : } X(\Omega) = \{-2; -1, 3, 8\}$$

2) valeurs des probabilités associées aux valeurs de X :  $p(X = 8) = p(\text{score} = 10) = \frac{1}{10}$

$$p(X = 3) = p(\text{score} = 5) = \frac{3}{10}$$

$$p(X = -1) = p(\text{score} = 1) = \frac{2}{10}$$

$$p(X = -2) = p(\text{score} = 0) = \frac{4}{10}$$

Valeurs possibles de X : $X(\Omega)$	-2	-1	3	8	total
$P(X = x_i)$	$4/10=2/5$	$2/10=1/5$	$3/10$	$1/10$	1

On remarque que :

$$p(X = 8) + p(X = 3) + p(X = -1) + p(X = -2) = 1$$

$$p(X \leq 0) = p(X = -2) + p(X = -1) = \frac{4}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$p(X > 0) = 1 - p(X \leq 0) = 1 - 0,6 = 0,4$$

4) déterminons :  $E(X)$  l'espérance de X

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p(X = x_i)$$

$$E(X) = \left(-2 \times \frac{4}{10}\right) + \left(-1 \times \frac{2}{10}\right) + \left(3 \times \frac{3}{10}\right) + \left(8 \times \frac{1}{10}\right) = 0,7$$

Ceci signifie qu'en moyenne le gain est de 0,7 DH par partie

5) déterminons : la variance  $V(X)$  et et l'écart type  $\sigma(X)$  ?

$$V(X) = \sum_{i=1}^4 x_i (p(X = x_i))^2 - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^4 x_i p_i^2 - (E(X))^2$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (-2)^2 \times 0,4 +$$

$$(-1)^2 \times 0, 2 + 3^2 \times 0, 3 + 8^2 \times 0, 1 - 0, 7^2$$

$$V(X) = 10,41$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10,4} \approx 3,22$$

le jeu est à gain positif car  $E(X) = 0, 7 > 0$ ,

il est plus favorable au joueur car il gagne en moyenne 0,7 DH.

7. soit  $y$  le prix de la partie pour que l'espérance soit nulle.

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow$$

$$0,4(0-y) + 0,2(1-y) + 0,3(5-y) + 0,1(10-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,4y + 0,2 - 0,2y + 1,5 - 0,3y + 1 - 0,1y = 0$$

$$\Leftrightarrow -y + 2,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2,7$$

Le prix doit être de 2,7 DH pour avoir une espérance nulle

**Exercice 28:** Une urne contient 6 boules qui portent les numéros : 2, 2, 2, 1, 1, 0 indiscernables au toucher

On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément

Soit  $Y$  la variable aléatoire qui associe à chaque tirage La somme des numéros des deux boules tirées.

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour  $Y$

$x_i$	1	2	3	4
$p(Y = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Y$

aléatoire  $Y$

3) calculer :  $E(Y)$  l'espérance de  $Y$  et la variance  $V(Y)$  et l'écart type  $\sigma(Y)$

**Solution :** 1) les valeurs possibles pour  $X$  sont :

On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros 1 donc : la somme = 2

On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros 2 donc : la somme = 4

On peut par exemple tirer deux boules dont une porte le numéro 0 et une autre 1 donc :

la somme = 1

On peut aussi tirer une boule qui porte le numéro 1 et une autre qui porte le numéro 2 donc : la somme = 3

$1+0=1$  ou  $2+0=2$  ou  $1+1=2$  ou  $1+2=3$  ou  $2+2=4$  Donc :  $Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Y$  (tableau)

L'évènement :  $(Y=1)$  se traduit par :

$(Y=1)$  " la somme des numéros des deux boules tirées est égal à 1 "

$(Y=1)$  " tirer une boules qui portent le numéro 0 et une boules qui portent le numéro 1 "

$$p(Y=1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$$

$(Y=2)$  " tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 0 ou tirer deux boules qui portent 1 "

$$p(Y=2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2}$$

$(Y=3)$  " tirer une boules qui portent 1 et une boules qui portent le numéro 2 "

$$p(Y=3) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{3}{5}$$

$(Y=4)$  " tirer deux boules qui portent 2 "

$$p(Y=4) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

On résume tous dans un tableau :

$$\text{On remarque que : } \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{6}{15} + \frac{3}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

3)  $E(Y)$  ? et  $V(Y)$  ? et l'écart type  $\sigma(Y)$  ?

$$E(Y) = \left(1 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4 \times \frac{3}{15}\right) = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \left(1^2 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3^2 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4^2 \times \frac{3}{15}\right) - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**Exercice29 :** Soit  $X$  la variable aléatoire définie par la loi de probabilités suivante :

$x_i$	-1	0	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$a$	$\frac{1}{6}$

1) calculer la probabilité de l'évènement ( $X = 2$ )

2) calculer  $E(X)$  et  $\sigma(X)$

**Exercice30 :** Une urne contient 6 boules qui portent les numéros : -1 ; -1 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2 indiscernables au toucher

On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément

Soit  $Z$  la variable aléatoire qui associe à chaque tirage La somme des numéros des deux boules tirées.

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour  $Z$

2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Z$

3) calculer :  $E(Z)$  l'espérance de  $Z$  et la variance  $V(Z)$  et l'écart type  $\sigma(Z)$

**Solution :** 1)  $(-1) + (1) = (0)$  ou  $(-1) + (-1) = (-2)$

$(-1) + (0) = (-1)$  ou  $(2) + (-1) = (1)$  ou

$(1) + (0) = (1)$

ou  $(2) + (0) = (2)$  ou  $(2) + (1) = (3)$

les valeurs possibles pour  $Z$  sont :

$$Z(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire  $Z$  (tableau)

L'évènement :  $(Z = -2)$  se traduit par :

$(Z = -2)$  " le somme des numéros des deux boules tirées est égal à -2"

$(Z = -2)$  " tirer deux boules qui portent -1 "

$$p(Z = -2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

$(Z = -1)$  " tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 0 "

$$p(Z = -1) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

$(Z = 0)$  " tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 1 "

$$p(Z = 0) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

$(Z = 1)$  " tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 2 ou tirer une boules qui portent 0 et une boules qui portent le 1 "

$$p(Z = 1) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{4}{15}$$

$(Z = 2)$  " tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 0 "

$$p(Z = 2) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

$(Z = 3)$  " tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 1 "

$$p(Z = 3) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

On résume tous dans un tableau :

$x_i$	-2	-1	0	1	2	3
$p(Z = x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

3)  $E(Z)$  ? et  $V(Z)$  ? et l'écart type  $\sigma(Z)$  ?

$$E(Z) = \left(-2 \times \frac{3}{15}\right) + \left(-1 \times \frac{3}{15}\right) + \left(0 \times \frac{3}{15}\right) + \left(1 \times \frac{4}{15}\right) + \left(2 \times \frac{1}{15}\right) + \left(3 \times \frac{1}{15}\right)$$

$$E(Z) = \left(-\frac{6}{15}\right) + \left(-\frac{3}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{2}{15}\right) + \left(\frac{3}{15}\right) = 0$$

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

$$V(Z) = \left((-2)^2 \times \frac{3}{15}\right) + \left((-1)^2 \times \frac{3}{15}\right) + \left((0)^2 \times \frac{3}{15}\right) + \left((1)^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left((2)^2 \times \frac{1}{15}\right) + \left((3)^2 \times \frac{1}{15}\right) - (0)^2$$

$$V(Z) = \left(\frac{12}{15}\right) + \left(\frac{3}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{9}{15}\right) = \frac{32}{15}$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{\frac{32}{15}}$$

**Exercice31 :** Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. Indiscernables au toucher

On tire de l'urne au hasard trois Boules successivement et sans remise

Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de jetons qui portent un chiffre impair

- 1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X
- 2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)
- 3) calculer :  $E(X)$  l'espérance de X et la variance  $V(X)$  et l'écart type  $\sigma(X)$

**Solution :** 1) On peut par exemple ne tirer aucun chiffre impair ( $X=0$ ) ou tirer un chiffre impair ( $X=1$ ) ou tirer deux chiffre impair ( $X=2$ ) ou tirer 3 chiffre impair ( $X=3$ ) donc : l'ensemble des valeurs possibles pour X est :  $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

- 2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire X (tableau)

L'évènement :  $(X = 0)$  se traduit par :

$(X = 0)$  " obtenir trois jetons pairs"

$$p(X = 0) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

$(X = 1)$  " obtenir un jeton impair"

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times A_4^2 \times A_5^1}{A_9^3} = \frac{15}{42}$$

$(X = 2)$  " obtenir deux jetons impairs"

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times A_4^1 \times A_5^2}{A_9^3} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$$

$(X = 3)$  " obtenir 3 jetons impairs"

$$p(X = 3) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$$

On résume tous dans un tableau :

$x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

- 3)  $E(X)$  ? et  $V(X)$  ? et l'écart type  $\sigma(X)$  ?

$$E(X) = \left(0 \times \frac{2}{42}\right) + \left(1 \times \frac{15}{42}\right) + \left(2 \times \frac{20}{42}\right) + \left(3 \times \frac{5}{42}\right) = \frac{5}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = \left((0)^2 \times \frac{2}{42}\right) + \left((1)^2 \times \frac{15}{42}\right) + \left((2)^2 \times \frac{20}{42}\right) + \left((3)^2 \times \frac{5}{42}\right) - \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

**Exercice 32:** Une urne contient 8 boules :

3 boules qui portent le numeros1 et une boule Qui porte le numéro 0 et le reste portent le numéro 2 et toutes les Boules sont indiscernables On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le produit des numéros des deux boules tirées.

- 1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X

- 2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)

- 3) calculer :  $E(X)$  l'espérance de X et la variance  $V(X)$  et l'écart type  $\sigma(X)$

- 4) déterminer la fonction  $F_x$  de répartition de la variable X et représenter graphiquement  $F_x$

**Solution :** 1) les valeurs possibles pour X sont : On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros1 donc : le produit =1

On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros2 donc : le produit =4

On peut par exemple tirer deux boules dont une porte le numéro 0 donc : le produit =0

On peut aussi tirer une boule qui porte le numéro 1 et une autre qui porte le numéro 2 donc : le produit =2

$1 \times 1 = 1$  ou  $2 \times 2 = 4$  ou  $0 \times 0 = 0$  ou  $0 \times 1 = 0$  ou  $0 \times 2 = 0$  ou  $2 \times 1 = 2$

Donc :  $X(\Omega) = \{0; 1, 2, 4\}$

- 2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)

L'évènement :  $(X = 0)$  se traduit par :

$(X = 0)$  " le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 0"

$$P(X = 0) = \frac{C_1^1 \times C_7^1}{C_8^2} = \frac{1 \times 7}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$(X = 1)$  " le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 1"

(On tire deux boules qui portent le numéro 1)

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

$(X = 2)$ " le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 2"

$(X = 2)$ " On tire une boule qui porte le numéro 1 et une boule qui porte le numéro 2"

$$P(X = 2) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{3 \times 4}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

$(X = 4)$ " On tire deux boules qui portent le numéro 2"

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

On résume tous dans un tableau :

$X(\Omega)$	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$7/28=1/4$	$3/28$	$12/28=3/7$	$6/28=3/14$

On remarque que :

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4) = 1$$

3)  $E(X)$  ?

$$E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) + 4 \times p(X = 4)$$

$$E(X) = \left(0 \times \frac{7}{28}\right) + \left(1 \times \frac{3}{28}\right) + \left(2 \times \frac{12}{28}\right) + \left(4 \times \frac{6}{28}\right) = \frac{3+24+24}{28} = \frac{51}{28}$$

Calcul de  $V(X)$

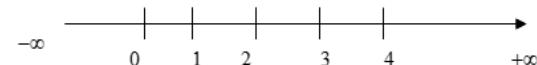
$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \left(0^2 \times \frac{7}{28}\right) + \left(1^2 \times \frac{3}{28}\right) + \left(2^2 \times \frac{12}{28}\right) + \left(4^2 \times \frac{6}{28}\right) - \left(\frac{51}{28}\right)^2 \\ &= \frac{3}{28} + \frac{48}{28} + \frac{96}{28} - \left(\frac{51}{28}\right)^2 = \frac{147}{28} - \left(\frac{51}{28}\right)^2 = \frac{4116}{28^2} - \frac{2601}{28^2} \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{1515}{784}$$

Calcul de  $\sigma(X)$  :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1515}{784}}$$

4)



Si  $x \leq 0$  alors :  $F_x(x) = P(X < x) = P(\Phi) = 0$

Si  $0 < x \leq 1$  alors :  $F_x(x) = P(X = 0) = \frac{1}{4} = \frac{7}{28}$

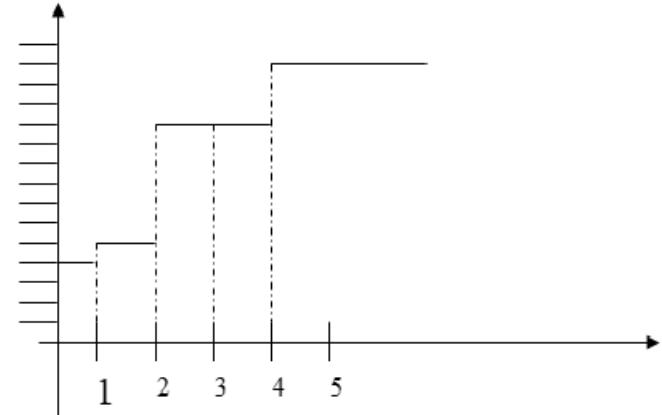
Si  $1 < x \leq 2$  alors :

$$F_x(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

Si  $x \in ]2, 4]$  alors :

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{10}{28} + \frac{12}{28} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14} \end{aligned}$$

$$\text{Si } x > 4 \text{ alors : } F_x(x) = \frac{22}{28} + \frac{6}{28} = \frac{28}{28} = 1$$



**Exercice 33 : 1)** on considère l'épreuve suivante : On lance une fois un dé cubique équilibré.

Et on considère l'événement suivant :

A : « on obtient un diviseur de 3 »

Calcule de la probabilité de l'événement A :

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{2}{3}$$

L'événement A peut se réaliser (Succès (S))

Ou ne pas se réaliser (Échec(E)).

**2)** on répète cette épreuve  $n = 4$  fois de suite Soit  $X$  la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois la réalisation de L'événement A

Pour les 4 épreuves.

la variable aléatoire  $X$  s'appelle une loi

binomiale de paramètre  $n = 4$  et  $p = \frac{1}{3}$

a) calculer :  $p(X = 2)$  ?

b) calculer :  $p(X = k)$  ?  $\forall k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

c) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X (tableau)

d) calculer :  $E(X)$  l'espérance de  $X$  et la variance  $V(X)$  et l'écart type  $\sigma(X)$  et remarquer que :  $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1-p)$

**Solution : 2)** a) L'événement :  $(X = 1)$  se traduit par : " L'événement A se réalise exactement 1 fois " on a les cas suivants :

A	Ā	Ā	Ā
---	---	---	---

Ou

Ā	A	Ā	Ā
---	---	---	---

Ou

Ā	Ā	A	Ā
---	---	---	---

Ou

Ā	Ā	Ā	A
---	---	---	---

A prend une place parmi 4 place  
il y'a donc :  $C_4^1$  possibilités :

$$\text{donc : } p(X=1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

On général on vérifie que :

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0;1;2;3;4\}$$

Loi de probabilités de la variable aléatoire X :

$$p(X=0) = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 \times 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$p(X=1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$p(X=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$p(X=3) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 4 \times \frac{1}{27} \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$x_i$	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$p(X=4) = C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{81}$$

d) calculer :  $E(X)$  l'espérance de  $X$  et la variance  $V(X)$  et l'écart type  $\sigma(X)$

un calcul de  $E(X)$  donne  $\frac{4}{3}$

et on remarque que  $E(X) = np = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

un calcul de  $V(X)$  donne  $\frac{8}{9}$

et on remarque que :  $V(X) = np(1-p) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$

**Exemple34 :** Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de 1/7.

On appelle succès l'événement « obtenir 6 » et échec « obtenir un numéro différent de 6 ».

Cette expérience qui ne comporte que deux issues suit une loi de Bernoulli.

Si On effectue cinq fois cette expérience. On est en présence d'un schéma de Bernoulli.

**Exercice35:** On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et soit l'évènement :

A "obtenir la face F "

Calculer la probabilité de l'évènement suivant :

B "obtenir face F exactement deux fois"

**Solution :**  $p(A) = \frac{1}{2}$  et  $n = 3$

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

**Exercice36:** On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et soit X le nombre de fois que l'on obtient "pile"

1. faire un arbre illustrant cette situation
2. donner la loi de probabilité de X
3. calculer et interpréter  $E(X)$

**Exercice37:** On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat

« Pile » et on perd 1 € pour chaque résultat

« Face ».

1) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.

- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- b) Quelle est la probabilité de l'évènement : « Obtenir un gain de 3 € » ? On note cette probabilité  $p(X=3)$ .

Verifier que la loi de probabilité de X est:

Gain $x_i$	$x_1 = -3$	$x_2 = 0$	$x_3 = 3$	$x_4 = 6$
Probabilité $p_i = p(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

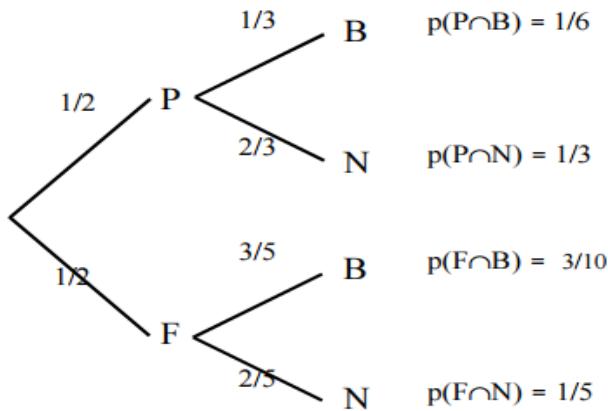
**Exercice38:** Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au Nombre considéré (en euros) ; sinon il perd ce même nombre d'euros.

1°) Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance Mathématique et son écart-type.

2°) Le jeu est-il favorable au joueur ?

**Exercice39:** On jette une pièce.

- Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
  - Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.
- On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous :



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Bon courage

