Exercices d'applications et de réflexions *sur* les Lois de composition interne

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Exercices AVEC SOLUTIONS

Structures algébriques(partie1)

Exercice1 : montrer on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\}$ que l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes

Solution :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+\right)$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times\right)$

on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on remarque bien que ce sont des lois de compositions internes

Exercice2 : on définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la relation T tel que : $xTy=\frac{x+y}{1+xy};\forall(x;y)\in]-1;1[^2$

Monter que T est une loi de composition interne Dans $]-1;1[$

Solution : soit $x\in]-1;1[$ et $y\in]-1;1[$

Montrons que : $xTy=\frac{x+y}{1+xy}\in]-1;1[$?

Calculons : $1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{(1+xy)^2}=\frac{x^2y^2+2xy+1-x^2-y^2-2xy}{(1+xy)^2}$$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2}=\frac{1-x^2-y^2(1-x^2)}{(1+xy)^2}$$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2}=\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2}$$

Or $x\in]-1;1[$ et $y\in]-1;1[$ donc : $|x|\prec 1$ et $|y|\prec 1$

donc : $x^2\prec 1$ et $y^2\prec 1$ on a donc : $1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2\succ 0$

donc : $\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2\prec 1$ donc : $\sqrt{\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\prec\sqrt{1}$

donc : $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|\prec 1$ donc : $-1\prec\frac{x+y}{1+xy}\prec 1$

donc : $\frac{x+y}{1+xy}\in]-1;1[$ cqfd

Exercice3 : on considére la matrice suivante : $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ calculer A^2 et A^3 et en déduire A^n $\forall n\in\mathbb{N}^*$

solution :

$$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\times A = \begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&6&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Montrons par recurrence que : $A^n = \begin{pmatrix}1&2n&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) $A^1 = \begin{pmatrix}1&2\times 1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = A$ vraie si n=1

b)supposons que : $A^n = \begin{pmatrix}1&2n&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

c)montrons que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix}1&2n+2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$?

$$A^{n+1} = A^n\times A = \begin{pmatrix}1&2n&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2n+2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Donc : $A^n = \begin{pmatrix}1&2n&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Exercice4 :on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y = xy-3x-3y+12$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et soit : $S =]3;+\infty[$

Monter que S est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

Solution : soit $x\in S$ et $y\in S$

Montrons que : $x*y\in S$?

$x*y-3 = xy-3x-3y+9 = x(y-3)-3(y-3)$

$x*y-3 = (y-3)(x-3)$

or $x\in S =]3;+\infty[\Leftrightarrow x\succ 3$ et $y\in]3;+\infty[\Leftrightarrow y\succ 3$

donc : $x*y-3\succ 0$ donc : $x*y\in]3;+\infty[= S$ cqfd

donc : S est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

Exercice5 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b = a+b-3ab$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Monter que $*$ est commutative et associative

2) on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T définit par : $(a;b)\mathrm{T}(x;y) = (ax;ay+b)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Monter que T est ni commutative et ni associative dans $\mathbb{R}^2$

Solution:1) Soit : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b = a+b-3ab = b+a-3ba = b*a$

Donc : $*$ est commutative

b)

$(a*b)*c = (a+b-3ab)*c = a+b-3ab+c-3(a+b-3ab)c$

$(a*b)*c = a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$

et on a :

$a*(b*c) = a*(b+c-3bc) = a+(b+c-3bc)-3a(b+c-3bc)$

$a*(b*c) = a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$

Donc : $(a*b)*c = a*(b*c)$

Donc : $*$ est associative

2)a)on a : $(1;3)\mathrm{T}(2;0) = (1\times 2;1\times 0+3) = (2;3)$

$(2;0)\mathrm{T}(1;3) = (2\times 1;2\times 3+0) = (2;6)$

Donc : $(1;3)\mathrm{T}(2;0)\neq(2;0)\mathrm{T}(1;3)$ donc : T n'est pas commutative

b)

$((1;3)\mathrm{T}(2;0))\mathrm{T}(5;7) = (2;6)\mathrm{T}(5;7) = (2\times 5;2\times 7+6) = (10;20)$

$(1;3)T((2;0)T(5;7))=(1;3)T(2\times5;2\times7+0)=(1;3)T(10;14)$

$(1;3)T((2;0)T(5;7))=(1\times10;1\times14+3)=(10;17)$

Donc : $((1;3)T(2;0))T(5;7)\neq(1;3)T((2;0)T(5;7))$

donc : T n'est pas associative

Exercice6 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=ab-(a+b)+2$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner les élements symétrisables

Solution:1) Soit : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b=ab-(a+b)+2=ba-(b+a)+2=b*a$

Donc : $*$ est commutative

2)a) $\forall a\in\mathbb{R}$: $2*a=2a-(2+a)+2=a$ et

$a*2=2a-(a+2)+2=a$

Donc 2 est l'élément neutre pour la loi $*$

b)soit $a\in\mathbb{R}$ on cherche $a'\in\mathbb{R}$ tel que :

$a*a'=2$ ($*$ est commutative) ?

$a*a'=2\Leftrightarrow aa'-(a+a')+2=2\Leftrightarrow a'(a-1)=a$

Si : $a=1$ alors : $0=1\Leftrightarrow a*a'=2$ donc impossible

Si : $a\neq1$ alors : $a'=\dfrac{a}{a-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a*a'=2$

Donc : $\forall a\in\mathbb{R}-\{1\}$ il admet un symétrique

$a'=\dfrac{a}{a-1}$

Exercice7 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=xy-4x-4y+20$;

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ 1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élement neutre et determiner le s'il existe

3) determiner les élements symétrisables s'il existent

Solution:1) Soit : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $x*y=xy-(x+y)+2=yx-(y+x)+2=y*x$

Donc : $*$ est commutative

2) si l'élement neutre existe alors $\forall x\in\mathbb{R}$: $e*x=x$ ($*$ est commutative)

$\forall x\in\mathbb{R}$: $e*x=x\Leftrightarrow xe-4x-4e+20=x$

$\Leftrightarrow x(e-5)-4e+20=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}e-5=0\\-4e+20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e=5\\e=5\end{cases}$

Donc 5 est l'élément neutre pour la loi $*$

3)soit $x\in\mathbb{R}$ on cherche $x'\in\mathbb{R}$ tel que :

$x*x'=5$ ($*$ est commutative) ?

$x*x'=5\Leftrightarrow xx'-4x-4x'+20=5\Leftrightarrow x'(x-4)=4x-15$

Si : $x=4$ alors : $0=1$ donc impossible

Si : $x\neq4$ alors : $x'=\dfrac{4x-15}{x-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x*x'=5$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}-\{4\}$ il admet un symétrique

$x'=\dfrac{4x-15}{x-1}$

Exercice8 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=x+4y-1$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élement neutre et determiner le s'il existe

Solution:1) On a : $0*1=0+4\times1-1=3$

$1*0=1+4\times0-1=0$

$0*1\neq1*0$

Donc : $*$ est non commutative

2) si l'élement neutre existe alors $\forall x\in\mathbb{R}$: $e*x=x*e=x$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $e*x=x\Leftrightarrow e+4x-1=x$

$\Leftrightarrow3x+e-1=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow\begin{cases}3=0\\e-1=0\end{cases}$

Donc impossible

Donc la loi $*$ n'admet pas d'élements neutres

Exercice9 : on considére les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

1) Montrer que : $A^2-2A+I_2=0$ et en déduire que

La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

2) calculer : B^2 et B^3 et en déduire que

La matrice B n'admet pas d'inverse

Solution

1) on a : $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

et $-2A+I_2=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

donc : $A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$

$A^2-2A+I_2=0 \Leftrightarrow A(A-2I_2)=-I_2 \Leftrightarrow A(2I_2-A)=I_2$

Et $A^2-2A+I_2=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (2I_2-A)A=I_2$

Donc : A est inversible et déterminer $A^{-1}=2I_2-A$

$A^{-1}=2I_2-A=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2)

$B^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\ -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$B^3=B\times B^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\ -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Donc : $B^3=0_3$

On suppose que B admet un inverse donc il existe une matrice C tel que : $BC=CB=I_3$

Donc : $BC=I_3 \Rightarrow B^2BC=B^2I_3 \Rightarrow 0_3\times C=B^2$

$\Rightarrow 0_3=B^2$ or $B^2\neq 0_3$ contradiction

Donc : B n'admet pas d'inverse dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice10 : on considére les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1) calculer : A^2 et A^3 et en déduire que

2) Montrer que : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : $(A-I_2)^2=0_2$ avec $0_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

4) en déduire que La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

Solution

1) on a : $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^3\times A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2) Montrer par récurrence que : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$A^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$ vraie si n=0

supposons que : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

montrons que : $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 2n+2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$?

$A^{n+1}=A^n\times A=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2n+2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Donc : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrons que : $(A-I_2)^2=0_2$

$(A-I_2)^2=\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$(A-I_2)^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0_2$

4)On a : $(A-I_2)^2=0_2 \Leftrightarrow A^2-2A+I_2=0_2$

$\Leftrightarrow A(2I_2-A)=(2I_2-A)A=I_2$

Donc : A est inversible et déterminer $A^{-1}=2I_2-A$

$$A^{-1}=2I_2-A=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

Exercice11 : on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a&b\sqrt{2}\\b\sqrt{2}&a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{Z}^2\text{et }a^2\text{-2b}^2=1\right\}$$

Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

Solution : soit $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(x;y)}\in E$

Donc : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a&b\sqrt{2}\\b\sqrt{2}&a\end{pmatrix}$ et $a^2\text{-2b}^2=1$

Et : $M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}x&y\sqrt{2}\\y\sqrt{2}&x\end{pmatrix}$ et $x^2\text{-2y}^2=1$

Montrons que : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}\in E$?

$$M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}a&b\sqrt{2}\\b\sqrt{2}&a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x&y\sqrt{2}\\y\sqrt{2}&x\end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}ax+2by&(ay+bx)\sqrt{2}\\(ay+bx)\sqrt{2}&ax+2by\end{pmatrix}$$

Donc : $\boldsymbol{M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=M_{(ax+2by;ay+bx)}}$

$(ax+2by;ay+bx)\in\mathbb{Z}^2$

Car $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

Et on a :

$$(ax+2by)^2-2(ay+bx)^2=(a^2x^2+4b^2y^2+4abxy)$$

$$-2(a^2y^2+b^2x^2+2abxy)=(a^2x^2-2a^2y^2)-2(2b^2y^2-b^2x^2)$$

$$=a^2(x^2-2y^2)-2b^2(x^2-2y^2)=(x^2-2y^2)(a^2-2b^2)=1\times1=1$$

donc : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}\in E$

donc : E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

Exercice12 : soit l'application : $f:(\mathbb{Z};+)\to(\mathbb{Z}^*;\times)$, $x\mapsto 5^x$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{Z}$, +) dans ($\mathbb{Z}^*$, $\times$)

Solution : $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$f(x+y)=5^{x+y}=5^x\times5^y=f(x)\times f(y)$ donc : f est un morphisme de ($\mathbb{Z}$,+) dans ($\mathbb{Z}^*$, $\times$)

Exercice13 : soit l'application : $g:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\ln x$

montrons que g est un morphisme de :

($]0;+\infty[$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, +)

Solution : $\forall(x;y)\in]0;+\infty[^2$

$$g(x\times y)=\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)=g(x)+g(y)$$

donc : g est un morphisme de ($]0;+\infty[$, $\times$) dans ($\mathbb{R}$, +)

Exercice14: soit l'application : $h:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $z\mapsto|z|$

montrons que h est un morphisme de : ($\mathbb{C}$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, $\times$)

Solution : $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$h(z\times z')=|z\times z'|=|z|\times|z'|=h(z)\times h(z')$ donc : f est un morphisme de ($\mathbb{C}$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, $\times$)

Exercice15 : soit l'application :

$k:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$

$\theta\mapsto e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

montrons que k est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($\mathbb{C}^*$, $\times$)

Solution : $\forall(\theta;\theta')\in\mathbb{R}^2$

$$k(\theta+\theta')=e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta+i\theta'}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=k(\theta)\times k(\theta')$$

donc : k est un morphisme de ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($\mathbb{C}^*$, $\times$)

Exercice16 : soit l'application : $\begin{array}{l} l:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R}) \\ x\mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

montrons que l est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($M_2(\mathbb{R})$, $\times$)

Solution : $\forall(x;x')\in\mathbb{R}^2$

on a : $l(x+x')=\begin{pmatrix} 1 & x+x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$l(x)\times l(x')=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x+x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $l(x+x')=l(x)\times l(x')$

donc : k est un morphisme de ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($M_2(\mathbb{R})$, $\times$)

Exercice17: soit f l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ n\mapsto \overline{2^n} \end{array}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{N}$, $+$) dans ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\times$)

Solution : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$

$$f(n+m)=\overline{2^{n+m}}=\overline{2^n\times 2^m}=\overline{2^n}\times\overline{2^m}=f(n)\times f(m)$$

donc : f est un morphisme de ($\mathbb{N}$, $+$) dans ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\times$)

Exercice18 : on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

Soit $A(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$$A(\mathbb{R};\mathbb{R})=\left\{f_{(a;b)}\,/\,\forall x\in\mathbb{R}:f_{(a;b)}(x)=ax+b\right\}$$

Soit l'application : φ : $\begin{array}{l} \varphi:\mathbb{R}^2\to A(\mathbb{R};\mathbb{R}) \\ (a;b)\mapsto f_{(a;b)} \end{array}$

Montrer que : φ est un morphisme de ($\mathbb{R}^2$, $+$) dans ($A(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $+$)

Solution: 1) Soit : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

On a :

$$\varphi\left((a;b)+(a';b')\right)=\varphi(a+a';b+b')=f_{(a+a';b+b')}$$

$$f_{(a+a';b+b')}(x)=(a+a')x+(b+b')=(ax+b)+(a'x+b')$$

Donc : $\varphi\left((a;b)+(a';b')\right)=\varphi(a;b)+\varphi(a';b')$

donc : φ est un morphisme de ($\mathbb{R}^2$, $+$) dans ($A(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $+$)

Exercice19 : soient $a\in\left]2;+\infty\right[$ et $b\in\left]2;+\infty\right[$

On pose : $a*b=(a-2)(b-2)+2$

1)montrer que $*$ est une loi de composition interne Dans $I=\left]2;+\infty\right[$

2)soit l'application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ vers I

tel que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

a) montrer que f est un morphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$)

b) en déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre a determiner

solution : 1) soient $a\in\left]2;+\infty\right[$ et $b\in\left]2;+\infty\right[$

$a\in\left]2;+\infty\right[\Rightarrow a\succ 2$ et $b\in\left]2;+\infty\right[\Rightarrow b\succ 2$

Donc : $(a-2)(b-2)\succ 0$

Donc : $(a-2)(b-2)+2\succ 2$

Donc : $a*b\in\left]2;+\infty\right[=I$

Donc : $*$ est une loi de composition interne Dans $I=\left]2;+\infty\right[$

2) soient $x \in \mathbb{R}^{*+}$ et $y \in \mathbb{R}^{*+}$

$$f(x\times y)=\frac{2xy+1}{xy}$$

$$f(x)*f(y)=\frac{2x+1}{x}*\frac{2y+1}{y}=\left(\frac{2x+1}{x}-2\right)\left(\frac{2y+1}{y}-2\right)+2$$

$$=\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}+2=\frac{2xy+1}{xy}$$

Donc : $f(x\times y)=f(x)*f(y)\ \forall(x;y)\in(\mathbb{R}^{*+})^2$

Donc : f est un morphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ dans $(I,*)$

b)puisque $\times$ est commutative dans $(\mathbb{R}^{*+},\times)$et f un homomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ dans $(I,*)$

alors $*$ est commutative dans I

et on a 1 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^{*+},\times)$

alors : $f(1)=3$ est l'élément neutre dans I

Exercice20 :on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ n'est pas associative

3) est ce que la loi $*$ admet un élement neutre ?

4)resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $2*x=5$ b) $x*x=1$

Solution:1) Soit : soit :$(a;b)\in\mathbb{R}^2$

On a : $a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)=ba+(b^2-1)(a^2-1)$

car la multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative

Donc :$a*b=b*a$ par suite $*$ est commutative

2) on a : $(-1*0)*2=0*2=-3$

Et $-1*(0*2)=-1*-3=3$

Donc : $(-1*0)*2\neq-1*(0*2)$

Donc : $*$ n'est pas associative

3)on a : $a*1=1*a=a\quad\forall a\in\mathbb{R}$

Donc : 1 est l'élément neutre pour la loi $*$

(l'élement neutre est unique)

4) a)on va resudre l'équation : $2*x=5$

$$2*x=5\Leftrightarrow 2x+3(x^2-1)=5\Leftrightarrow 3x^2+2x-8=0$$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=\frac{4}{3}$ donc : $S=\left\{-2;\frac{4}{3}\right\}$

b)on va resudre l'équation : $x*x=1$

$$x*x=1\Leftrightarrow x^2+(x^2-1)^2=1\Leftrightarrow x^4-x^2=0$$

$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1$

donc : $S=\{-1;0;1\}$

Exercice21 :on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)*(a';b')=(a\times a';b\times b')$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

1) Monter que $*$ est commutative et associative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables Pour la loi $*$

3)soit : $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

a)montrer que S est une partie stable de$(\mathbb{R}^2,*)$

b) Monter que $(S,*)$ admet un élement neutre et comparer les les élements neutres de $(\mathbb{R}^2,*)$ et de $(S,*)$

Solution:1) a) Montrons que $*$ est commutative ?

Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

$$(a;b)*(a';b')=(a\times a';b\times b')=(a'\times a;b'\times b)=(a';b')*(a;b)$$

Donc :$*$ est commutative

b) Montrons que $*$ est associative?

Soit: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ et$(a'';b'')\in\mathbb{R}^2$

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a\times a';b\times b')*(a'';b'')$$

$\left(\left(a;b\right)*\left(a';b'\right)\right)*\left(a'';b''\right)=\left(a\times a'\times a'';b\times b'\times b''\right)$

On aussi : $\left(a;b\right)*\left(\left(a';b'\right)*\left(a'';b''\right)\right)=\left(a;b\right)*\left(a'\times a'';b'\times b''\right)$

$\left(a;b\right)*\left(\left(a';b'\right)*\left(a'';b''\right)\right)=\left(a\times a'\times a'';b\times b'\times b''\right)$

Donc :

$\left(\left(a;b\right)*\left(a';b'\right)\right)*\left(a'';b''\right)=\left(a;b\right)*\left(\left(a';b'\right)*\left(a'';b''\right)\right)$

Donc : $*$ est associative

2)a) Montrons que $*$ admet un élement neutre

Soit: $\left(a;b\right)\in\mathbb{R}^2$

On a : $\left(a;b\right)*\left(1;1\right)=\left(a;b\right)\quad\forall\left(a;b\right)\in\mathbb{R}^2$

Et puisque :$*$ est commutative

Alors : $*$ admet un élement neutre c'est $\left(1;1\right)$

b) determinons dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables pour la loi $*$

soit $\left(a;b\right)\in\mathbb{R}^2$ on cherche $\left(a';b'\right)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$\left(a;b\right)*\left(a';b'\right)=\left(1;1\right)$

$\left(a;b\right)*\left(a';b'\right)=\left(1;1\right)\Leftrightarrow\left(a\times a';b\times b'\right)=\left(1;1\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b\times b'=1\\a\times a'=1\end{cases}$ si $a\neq0$ et $b\neq0$ alors $\begin{cases}a'=1/a\\b'=1/b\end{cases}$

Donc les élements dans $\mathbb{R}^2$ symétrisablesPour la loi $*$ sont les couples $\left(a;b\right)\in\mathbb{R}^2$ tel que: $a\neq0$ et $b\neq0$

Et le symétrique de $\left(a;b\right)$ est $\left(1/a;1/b\right)$ pour $*$

3)a) $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

Soit : $\left(a;0\right)\in S$ et $\left(b;0\right)\in S$

$\left(a;0\right)*\left(b;0\right)=\left(ab;0\right)\in S$

Donc : S est une partie stable de$\left(\mathbb{R}^2,*\right)$

b) soit :$\left(a;0\right)\in S$

on a : $\left(a;0\right)*\left(1;0\right)=\left(a;0\right)$ et $\left(1;0\right)*\left(a;0\right)=\left(a;0\right)$

donc : $\left(1;0\right)$ est élément neutre pour $\left(S,*\right)$

et on a $\left(1;1\right)$ est élément neutre pour$\left(\mathbb{R}^2,*\right)$

et : $\left(1;1\right)\neq\left(1;0\right)$

Exercice22 :on muni $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T suivante : $zTz'=z\overline{z'}$; $\forall\left(z;z'\right)\in\mathbb{C}^2$

$\forall\left(a';b'\right)\in\mathbb{R}^2$ (F, T) $\forall\left(z;z'\right)\in\mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(zTz\right)Tz=i$

Solution :

1) la commutativité de T ?

On a : $1Ti=1\overline{i}=-i$ et $iT1=i\overline{1}=i$

Donc : $1Ti\neq iT1$ donc T non commutative

L'associativité de T ?

$\left(iT1\right)Ti=iTi=i\cdot\left(-i\right)=1$

$iT\left(1Ti\right)=iT-i=i\cdot i=-1$

Donc : $\left(iT1\right)Ti\neq iT\left(1Ti\right)$ donc T non associative

2)résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(zTz\right)Tz=i$

$\left(zTz\right)Tz=i\Leftrightarrow\left(z\overline{z}\right)Tz=i\Leftrightarrow z\overline{z}\overline{z}=i\Leftrightarrow|z|^2\,\overline{z}=i$

On pose : $z=x+iy$ avec $\left(x;y\right)\in\mathbb{R}^2$

$|z|^2\,\overline{z}=i\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)\left(x-iy\right)=i$

$|z|^2\,\overline{z}=i\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)x-iy\left(x^2+y^2\right)=i$

$|z|^2\,\overline{z}=i\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)x=0\\y\left(x^2+y^2\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=0\;ou\;x=0\\y\left(x^2+y^2\right)=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=0\\0=-1\end{cases}ou\begin{cases}x=0\\y^3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow z = -i$ donc : $S = \{-i\}$

Exercice23 :on muni $I =]0;+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ suivante :

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x;y) \in I^2$$

soit f l'application définie sur I vers I

tel que : $f(x) = x^2 \quad \forall x \in I$

1) montrer que : $f(x*y) = f(x) + f(y)$

2)a) montrer que $*$ est associative
b) est ce que $*$ admet un élément neutre

3)soit $a \in I$ calculer : $A = \underbrace{a*a*....*a}_{nfois} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Solution : soit $(x;y) \in I^2$

1) $f(x*y) = (x*y)^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

$= f(x) + f(y)$ Cqfd

2) $f(x*y) = f(x) + f(y)$

Donc f est un homomorphisme et puisque

f est une bijection donc f est un isomorphismes

De $(I;*)$ dans $(I;+)$ donc : $(I;*)$ et $(I;+)$

Ont la même structures et puisque + est associative dans I alors $*$est aussi associative

Et puisque $(I;+)$ n'admet pas d'élément neutre

alors : $(I;*)$ n'admet pas d'élément neutre

3) $f\left(\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\right) = \underbrace{f(a) + f(a) + ... + f(a)}_{nfois}$

$f(A) = nf(a) = na^2$

Et puisque f est un isomorphismes de $(I;*)$

dans $(I;+)$ donc : $A = f^{-1}(na^2)$

Et puisque : $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ donc / $A = \sqrt{na^2} = \sqrt{n}a$

Exercice24 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y = x + y - xy$; $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

tel que : $f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) montrer que f est un homomorphisme bijectif

De $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$

2)en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera

3) determiner l'ensemble des élements symétrisables pour la loi $*$

4)soit $a \in \mathbb{R}$ calculer : $A = \underbrace{a*a*....*a}_{nfois} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Solution : 1) $f(x) = 1 - x$

$f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x = y \Leftrightarrow x = 1 - y$

Donc : $f^{-1}(x) = 1 - x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $f^{-1} = f$

$f(x*y) = 1 - x*y = 1 - (x + y - xy)$

$= (1-x)(1-y) = f(x) \times f(y)$

Donc : f est un isomorphismes de $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$

2) puisque f est un isomorphismes de $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$ alors : $(\mathbb{R};*)$ et $(\mathbb{R};\times)$

Ont la même structure et puisque $\times$ est associative dans $\mathbb{R}$ alors $*$ est aussi associative dans $\mathbb{R}$ et puisque 1 est élément neutre dans $(\mathbb{R};\times)$ alors $f^{-1}(1) = f(1) = 0$ est élément neutre dans $(\mathbb{R};*)$

3)on a 0 est élément neutre unique qui n'admet pas de symétrique dans $(\mathbb{R};\times)$ et on a $f(0)=1$

Donc : l'ensemble des élements symétrisables pour $(\mathbb{R};*)$ est $\mathbb{R}-\{1\}$

4) $f(A)=f\left(\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\right)=\underbrace{f(a)\times f(a)\times....\times f(a)}_{nfois}$

$f(A)=(f(a))^n=(1-a)^n$

Donc : $A=f^{-1}\left((1-a)^n\right)=f\left((1-a)^n\right)=1-(1-a)^n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien