Exercices de rappels d'applications et de réflexions *sur L'ARITHMETIQUE*

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

TD : L'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156
12)Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Exercice2 : 1) $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Exercice3 : $a\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/29$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$
1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.
2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$:
3 divise 4^n-1

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$
Représente un entier relatif ?

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2-y^2=32$ avec $x\succ y$
b) $2xy+2x+y=99$

Exercice9 :déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 $(p\in\mathbb{N})$

Exercice 10: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice11: $b\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{Z}$
si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}

Exercice12: 1) Les nombres suivants sont–ils premiers :499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2+3n$ $n\in\mathbb{N}$

Exercice 13 :
Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 14 :
a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

Exercice15 : montrer que $\forall a\in\mathbb{Z}$ $a\wedge(a+1)=1$

Exercice16 : $n\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=n^2+3$ et $B=n+2$
1) montrer que $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$
2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N}$

Exercice 17:
1- Montrer que tout diviseur commun de :
$a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13
2- Déterminer tous les diviseurs communs de a et b.
3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels :
$a \wedge b = 13$

Exercice 18: $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $d\in\mathbb{Z}$ tels que : $a=bc+d$
1) montrer que $a\wedge b=b\wedge d$
2) En déduire que : $a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

Exercice19 : $a\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=35a+57$ et $B=45a+76$
montrer que $A\wedge B=1$ ou $A\wedge B=19$

Exercice 20:
1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67\wedge 39$
2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u+67v=1$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a :
1) $n\wedge(n+1)=1$ 2) $n\wedge(2n+1)=1$
3) $(2n+1)\wedge(3n+1)=1$

Exercice22: $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19
Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :
1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Exercice23 : 1)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n
2)en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}
3)Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tél que : $3^n+5n+2\equiv 0[10]$

Exercice24 : 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$
$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv 0[n^2]$
2) montrer que: $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}\equiv 3[10]$

Exercice 25 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13
3) Montrer que pour tout n entier naturel :
$3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7
4) Montrer que pour tout n entier naturel,
$5n^3+n$ est divisible par 6
5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : n^6-1 est un multiple de 7
6 Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2+5)$ est divisible par 6

Exercice26 : $x\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a=9x+4y$ et $b=2x+y$
1)montrer que $x\wedge y=a\wedge b$
2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$
a)montrer que $a\wedge b=b\wedge 7$
b)en déduire les valeurs possibles $a\wedge b=d$
c)montrer que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$
d)en déduire les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$

Exercice27: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x=\bar{3}$ 2) $x^2+\bar{3}x=\bar{0}$
3) $\overline{2013}x^3+\bar{2}x=\bar{k}$

Exercice28 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ l'équations suivants : $x+\bar{3}y=\bar{1}$

Exercice29 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases}\bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}$

Exercice30 : déterminer : $d=(-8316)\wedge 1080$ et $m=8316\vee 1080$

Exercice31: si $2=a\wedge b$ et $-12=a\times b$ déterminer : $a\vee b$

Exercice32: $a=(25^n-1)(36^n-1)$ et $b=(5^n-1)(6^n-1)$
Calculer les $a\vee b$ $(n\in\mathbb{N})$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien