Exercices d'applications et de réflexions ***sur les nombres complexes (Partie 2)***

PROF: ATMANI NAJIB 2ème BAC SM

TD : NOMBRES COMPLEXES

Exercice1 : donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i$ 2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Exercice2 : en utilisant la Formule de Moivre

1)montrer que : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

2)montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

3)montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Exercice3 : Linéariser : $\cos^4\theta$

Exercice4 :1) Montrer que $(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)$

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2)on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1+e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1-e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u+v$; u_1 et u_2

Exercice5 :1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \theta\in\mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$

3) Montrer que : $\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta \quad \theta\in\mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5\theta$ b) $\cos^2\theta\sin^3\theta$

Exercice6 :Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :1) $z_1 = 5$

2) $z_2 = -4$ 3) $z_3 = -3+4i$ 4) $z_4 = -5-12i$

Exercice7 : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -12$ 2) $z_2 = \cos\alpha - 2$ 3) $z_3 = 4-2i$

4) $z_4 = -4-3i$

Exercice8 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(E): z^2 - z + 2 = 0$

2) $(E): z^2 - z - 2 = 0$

3) $(E): z^2 - 2z + 1 = 0$

4) $(1+i)z^2 - (1+7i)z + 14 + 12i = 0$

Exercice9 : soit $z\in\mathbb{C}$ on pose :

$P(z) = z^2 - 2z + 2$

1)calculer : $P(1-i)$

2)en déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équations $P(z) = 0$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$

2) $z^2-6z+13=0$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos 2\theta)z+i\sin\theta=0$ avec : $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice11 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $z^2+2z+5=0$ 2) $2z^2+3iz+(1-i)=0$

3) $3iz^2+(1-2i)z+5i+1=0$

Exercice12 : 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17=0$

2) Soit $\boldsymbol{P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i}$

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b) déterminer les réels $\boldsymbol{a;b;c}$ tels que :

$\boldsymbol{P(z)=(z+i)(az^2+bz+c)}$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\boldsymbol{P(z)}=0$

Exercice13 :

Soit $P(z)=z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-i\sqrt{3})z-i=0$

1. Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet un imaginaire pur comme racine.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice 14: soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

Soit $(E): z^3+2(\sqrt{3}-1)z^2+4(1-\sqrt{3})z-8=0$

1) Montrer que 2 est une solution de l'équation (E)

2) monter que :

$z^3+2(\sqrt{3}-1)z^2+4(1-\sqrt{3})z-8=(z-2)(z^2+2\sqrt{3}z+4)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice 15: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2Z^2-2Z+5=0$ 2) $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

Exercice16 : soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E)

$P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i=0$

1) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet un imaginaire pur z_0 à déterminer

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice17 : soit : $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1) Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2) en déduire : $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice18 : déterminer Les racines 4éme de l'unité

Exercice19 : Ecrire sous les formes algébriques les racines 6ime de l'unité.

Exercice 20: Considérons l'équation : (E) :

$z^6=\overline{z}$ 1) Montrer que si $z\neq 0$ et z solution de (E) Alors $|z|=1$

2- Résoudre l'équation (E)

Exercice 21 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

2) Ecrire les solutions sous leurs formes algébriques et déterminer :

$\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice22 : 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2-\sqrt{3}iz-1-\sqrt{3}i=0$

2) En déduire sous les formes trigonométriques et algébriques les solutions de l'équation :

$z^6-\sqrt{3}iz^3-1-\sqrt{3}i=0$

Exercice23 : Dans le plan complexe $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points : A ;B ;C d'affixe respectivement $z_A=3+5i$; $z_B=3-5i$; $z_C=7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u})=4-2i$

1) montrer que : $z'=z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$)

2) verifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Exercice24:

1- Donner l'écriture complexe de la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ qui transforme $A(1-2i)$ en $B(-4+3i)$

2- Déterminer l'image du Point $C(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$ par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Exercice25 : Dans le plan complexe $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3;-2)$) et de Rapport $k=4$

1)montrer que : $z'=4z-9+6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega,k)$**)**

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega,k)$

Exercice 26:

1- Donner l'écriture complexe de l'homothétie de rapport 2 et qui transforme $A(1-2i)$ en $B(-4+3i)$

2- Déterminer l'image du point $C(-1+5i)$ par l'homothétie h.

Exercice27 : Dans le plan complexe direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points : A ;B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)montrer que : $z' = iz+4i+12$ (l'écriture complexe de la rotation r **)**

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Exercice 28:Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω $(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Exercice29 : Soit la rotation r de centre Ω (i) et transforme O en $O'\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Exercice30 :

1- Montrer qu'il existe une rotation R de centre $\Omega(3+i)$ qui transforme $A(2+4i)$ en $B(6+2i)$

2- Donner l'écriture complexe de la rotation R

3- Déterminer l'image de $C(-1+3i)$

Exercice 31: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que

$z'=-2z+3-3i$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Exercice 32 : Soit u un complexe non nul, et f la transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z'=uz+i-\bar{u}$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques dans chacun des cas suivant :1) $u = 1$ 2) $u = -3$

3) $u = j$ 4) $u=4-4\sqrt{3}i$

Exercice 33 : Dans le plan complexe direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point : A (i) et la rotation R_0 de centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1 la rotation de centre A (i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$ et ses éléments caractéristiques

Exercice 34 : soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit R la rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation $T=t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R\circ T$ **et** $F_2 = T\circ R$

Exercice 35 : Dans le plan complexe direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le point : A (2) et soit φ une transformation qui transforme $M(z)$ en M_2 (z_2) tel que $z_2 = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et soit H l'homothétie de centre A (2) et de Rapport $k=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Et soit : $f = \varphi\circ H$

1) montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle

2) montrer que $f\circ H^{-1} = \varphi$

Exercice 36 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit a un complexe non nul ; Pour tout nombre z de $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, on pose : $f_a(z) = z' = \dfrac{az}{z-a}$

1. Montrer que :

$f_a(z)\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2\mathcal{R}e(a) = |a|^2\mathcal{R}e(z)$

2. Soit z un élément de $\mathbb{C}*\setminus\{a\}$
on pose : $|z-a| = r$ et $\arg(z-a)\equiv\theta$ $[2\pi]$

a. Calculer $|f_a(z)-a|$ en fonction de r est $|a|$

b. Calculer $arg(f_a(z)-a)$ en fonction de θ er r.

3. on pose $a = -1 + i$ et considérons les ensembles des points $M(z)$ définis par :

$(D) = \{M(z);\ \arg(z-a)\equiv\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]\}$

$(\mathcal{C}) = \{M(z);\ |f_a(z)-a| = 2\}$

$(\mathcal{E}) = \{M(z);\ f_a(z)\in i\mathbb{R}\}$

a) Déterminer les ensembles $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{C})$ et montrer que (D) est une demi droite d'origine $A(a)$ privée de A et déterminer son équation cartésienne.

b) soit z_0 un élément de $\mathbb{C}\setminus\{a\}$,et $B(z_0)$ tel que $B\in(D)\cap(\mathcal{C})$; écrire $f_a(z_0)$ sous sa forme algébrique puis déterminer z_0

c) Construire les ensembles (D); $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{E})$.

4) Déterminer la représentation complexe de la rotation ρ de centre a et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

5) Déterminer la représentation complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.

6. Déterminer la transformation $to\rho$ et ses éléments caractéristiques.

Exercice 37 : soit Z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1|\le\left||z|-1\right|+|z||\arg z|$

Exercice38 :soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$

et $a\neq c$ et $b\neq c$

1)Montrer que : $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)^2\times\dfrac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)\equiv\dfrac{1}{2}\arg\left(\dfrac{b}{a}\right)\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice39 :soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z+z^2+z^4$ et $T = z^3+z^5+z^6$

1)Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\operatorname{Im}(S)\succ 0$

3)calculer $S+T$ et $S\times T$

4)en déduire les nombres S et T

Exercice40 : Soit

$P(z)=(i-1)z^3-(5i-11)z^2-(43+i)z+9+37i$

1) Montrer que l'équation (E) : $P(z)=0$ admet un imaginaire pur z_0 unique comme solution

2)déterminer les nombres complexes $a;b;c$ tels que : $P(z)=(z-z_0)(az^2+bz+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice41 : Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E)\ 2z^3-(1+2i)z^2+(25i-1)z+13i=0$

1) Montrer que l'équation (E): $P(z)=0$ admet une solution réelle z_0 à déterminer

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien