

## Calcul intégral

### EXERCICE 1

Calculer les intégrales ci-dessous

$\int_{-1}^2 x x-1  dx$	$\int_{-1}^0 \frac{tdt}{(2t^2+1)^3}$	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} dx$	$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$
$\int_0^1 \frac{t^3-3t}{(t+1)^2} dt$	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2-2x+1}$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$	$\int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{x}{x^4+1} dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx$	$\int_2^4 \frac{dt}{1-t^2}$	$\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)} dx$	$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{9+4x^2}$

### EXERCICE 2

En utilisant une intégration par partie déterminer

$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$	$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$	$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$
$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$	$\int_1^3 (2x-1) \ln x dx$	$\int_1^2 (2x-1) e^x dx$

### EXERCICE 3

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^3}$ poser $t = x^2$	$\int_1^2 \frac{\sqrt{2t-1}}{t} dt$ poser $x = \sqrt{2t-1}$
$\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ poser $t = \sqrt{x-1}$	$\int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$ poser $t = \sqrt{x} + 1$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ poser $t = \tan \frac{x}{2}$	$\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$ poser $x = \sqrt{t}$

### EXERCICE 4

- 1) a) déterminer deux réels  $b$ ,  $a$  tels que  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) \frac{2x-5}{(x-1)^3} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$
- b) en déduire la valeur de  $\int_2^3 \frac{2x-5}{(x-1)^3} dx$

Calcul intégral

2) a) déterminer  $b, a$  tels que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}$

b) en déduire  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(1+x^2)} dx$

c) utilisez une intégration par partie et calculez  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

EXERCICE 5

Soit  $n$  un entier naturel .

On considère la fonction  $\varphi_n$  définie par :  $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$  et on pose  $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$

1) calculer  $I_0$  ,  $I_1$

2) a) montrer que  $(I_n)_n$  est décroissante ; convergente

b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$

b) en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(nI_n - 1)$

EXERCICE 6

Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on pose  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$  et  $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$

1) calculer  $I_0$  ;  $I_1$

2) a) montrer que  $(I_n)_n$  est décroissante et convergente

b) prouver que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3) a) montrer que  $(\forall x \in [0,1]) \quad 0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{x+1} \leq \frac{1}{2}(x-1)$

b) en déduire  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$  déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$