

CALCULS INTEGRALES : Exercices d'applications et de réflexions avec solutions

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC SM

CALCULS INTEGRALES: Exercices avec solutions

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_2^4 3x dx$ 2) $J = \int_0^1 (2x+3) dx$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$

Solution : 1) la fonction $x \mapsto 3x$ est continue sur $[2; 4]$

Une primitive sur $[2; 4]$ est : $x \mapsto \frac{3}{2} x^2$

Donc : $I = \int_2^4 3x dx = \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_2^4 = \frac{3}{2} \times 4^2 - \frac{3}{2} \times 2^2 = 18$

2) $J = \int_0^1 (2x+3) dx = \left[x^2 + 3x \right]_0^1 = (1+3) - (0) = 4$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$ 2) $I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ 4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt$ 6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ 8) $I_8 = \int_{\ln 2}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ 10) $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$

11) $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ 12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

13) $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$ 14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ 16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$

17) $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ 18) $I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$

19) $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ 20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$

Solution : 1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx = \left[2 \frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = [x^2 - x]_0^2$

$I_1 = (2^2 - 2) - (0^2 - 0) = 4 - 2 = 2$

$I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx = \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{4} x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + 2x \right]_{-1}^1$

$I_2 = \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} 1^5 - 1^4 + 2 \right) - \left(\frac{1}{5} (-1)^5 - (-1)^4 - 2 \right)$

$I_2 = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} - 1 - 2 \right) = \frac{1}{5} - 1 + 2 + \frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5}$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} (2t)' e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \frac{1}{2} e^{2 \times 0}$

$I_4 = \frac{1}{2} e^{\ln 2^2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} 4 - \frac{1}{2} e^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} -\frac{1}{2} (-t^2)' e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$I_5 = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}} = -\frac{1}{2} e^{-(\sqrt{\ln 2})^2} + \frac{1}{2} e^{-0^2} = -\frac{1}{2} e^{-(\ln 2)} + \frac{1}{2}$

$I_5 = -\frac{1}{2} e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$6) I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^2 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^2 x dx$$

$$I_6 = \left[\frac{1}{2+1} \ln^{2+1} x \right]_1^e = \frac{1}{3} \ln^3 e - \frac{1}{3} \ln^3 1 = \frac{1}{3}$$

$$7) I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \left[\ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2}$$

$$I_7 = \ln |e^{\ln 2} + 1| - \ln |e^0 + 1| = \ln |3| - \ln |2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$8) I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}} dx = \left[\ln |e^x - e^{-x}| \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_8 = \ln |e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}| - \ln |e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}| = \ln \left| 3 - \frac{1}{e^{\ln 3}} \right| - \ln \left| e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}} \right|$$

$$I_8 = \ln \left| 3 - \frac{1}{3} \right| - \ln \left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \ln \left(\frac{8}{3} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln \left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}} \right) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$$

$$9) I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^1 dx = \left[\frac{1}{1+1} (\ln x)^{1+1} \right]_1^e$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \int_2^3 \frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3$$

$$I_{10} = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3 = 2(\sqrt{14} - \sqrt{6})$$

$$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = 2 \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1$$

$$I_{11} = 2 \left[\frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} (3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} (1)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \left((\sqrt{3})^3 - 1 \right) = \frac{4}{3} (3\sqrt{3} - 1)$$

$$12) I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \sin^3 x dx = \left[\frac{1}{4} \sin^4 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{12} = \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin^4 0 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx = 3 \int_1^2 (3x-4)^{-5} dx = \int_1^2 (3x-4)' (3x-4)^{-5} dx$$

$$I_{13} = \left[\frac{1}{-5+1} (3x-4)^{-5+1} \right]_1^2 = \left[\frac{1}{-4} (3x-4)^{-4} \right]_1^2 = \frac{1}{-4} (2)^{-4} - \frac{1}{-4} (-1)^{-4}$$

$$I_{13} = \frac{1}{-4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{64} + \frac{16}{64} = \frac{15}{64}$$

$$14) I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx = \left[2x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I_{14} = \left(2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin \pi \right) - 0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$15) I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$$

(on a : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx$$

$$I_{15} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I_{15} = \frac{\pi + 2}{8}$$

$$16) I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{(2x+1)'}{2x+1} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln |2x+1| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln |3| + 1 - \frac{1}{2} \ln |1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$17) I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^3 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^3 x dx$$

$$I_{17} = \left[\frac{1}{3+1} \ln^{3+1} x \right]_1^e = \frac{1}{4} \ln^4 e - \frac{1}{4} \ln^4 1 = \frac{1}{4}$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} ((x-1)^2)' e^{(x-1)^2} dt = \left[\frac{1}{2} e^{(x-1)^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e = \frac{1}{2} (1 - e)$$

$$19) I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1 + \ln x)} dx$$

$$I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^2 \frac{(1 + \ln x)'}{(1 + \ln x)} dx = \left[\ln |1 + \ln x| \right]_1^2$$

$$I_{19} = \ln|1 + \ln 2| - \ln|1 + \ln 1| = \ln|1 + \ln 2| = \ln(1 + \ln 2)$$

$$20) I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + (\tan x)^2 - 1 dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1 + (\tan x)^2) - 1 \right) dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$21) I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx = \int_1^e \left(8x^8 - 4 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= \left[\frac{8}{9} x^9 - 4x + 2 \ln x \right]_1^e = \frac{8}{9} e^9 - 4e + \frac{46}{9}$$

Formules importantes : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \quad ; \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^3 |x - 1| dx \quad 2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$$

Solution : 1) on a $x \in [0, 3]$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ on va étudier le signe de : $x - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

la Relation de Chasles donne :

$$I = \int_0^3 |x - 1| dx = \int_0^1 |x - 1| dx + \int_1^3 |x - 1| dx$$

$$I = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^3 (x - 1) dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{2}$$

$$2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$$

$$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

$$\text{a) si } x \in [-2; -1] \text{ alors : } x(x+1) \geq 0$$

$$\text{donc : } |x(x+1)| = x(x+1)$$

$$\text{b) si } x \in [-1; 0] \text{ alors : } x(x+1) \leq 0$$

$$|x(x+1)| = -x(x+1)$$

La Relation de Chasles donne :

$$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)| dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)| dx$$

$$J = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x) dx + \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx$$

$$J = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0$$

$$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) = 1$$

$$\text{Exercice4 : on pose: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$$

Calculer $I + J$ et $I - J$ et en déduire I et J

Solution :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ par sommation on trouve: } 2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{donc : } I = \frac{\pi + 2}{8} \text{ et on remplace dans la 1ère}$$

$$\text{équation et on trouve: } \frac{\pi + 2}{8} + J = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc: } J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi + 2}{8} = \frac{2\pi - \pi - 2}{8} = \frac{\pi - 2}{8}$$

Exercice5 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2 - 4x)^2} dx \quad 2) I = \int_0^{\ln 3} |2 - e^x| dx$$

$$3) I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$$

Solution : $1) x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

La Relation de Chasles donne :

$$I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx = \int_0^2 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{-(x-2)}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{-(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_2^3$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{6} - \frac{2}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$2) I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$$

$$2-e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$$

$$I = \int_0^{\ln 2} |2-e^x| dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} |2-e^x| dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} (2-e^x) dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x - 2 dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[2x - e^x \right]_0^{\ln 2} + \left[e^x - 2x \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I = ((2 \ln 2 - 2) + 1) + ((3 - 2 \ln 3) - (2 - 2 \ln 2)) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$$

Exercice 6: Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$$

Solution : On remarque que : $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right)$

$$\text{donc : } I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx = \int_0^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

et la linéarité de l'intégrale donne :

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$$

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$$

$$I = \frac{1}{4} \left[\ln|x-2| \right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[\ln|x+2| \right]_0^1$$

$$I = -\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} (\ln 3 - \ln 2) = -\frac{1}{4} \ln 3$$

Exercice 7 : on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

$$1) \text{montrer que : } \cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2) en déduire l'intégrale I

Solution : 1) on a : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4$$

$$= \frac{1}{16} \left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 \cdot (e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2 \cdot (e^{-ix})^2 + 4(e^{ix}) \cdot (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4 \right)$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{3ix} e^{-ix} + 6e^{2ix} e^{-2ix} + 4e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6)$$

$$= \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

Or on sait que :

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix} \text{ et } 2 \cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$$

$$\text{Donc : } \cos^4 \theta = \frac{1}{16} ((2 \cos 4x) + 4(2 \cos 2x) + 6)$$

$$\text{Donc : } \cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

$$2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4x + 4 \frac{1}{2} \sin 2x + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 2\pi + 4 \frac{1}{2} \sin \pi + 3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

Exercice8 :d'application Soit $f : x \rightarrow e^{-x^2}$

Définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x) dx$$

1) Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$$0 \leq F(a) \leq e^{-1}.$$

Solution :1) Une exponentielle étant toujours

positive : $0 \leq f(x)$ pour tout réel x et donc en

particulier pour tout $x \geq 1$. De plus, si $x \geq 1$, alors

$x \leq x^2$, c'est-à-dire $-x \geq -x^2$ et donc $e^{-x} \geq f(x)$ par

croissance de la fonction exponentielle.

On en déduit donc que pour tout réel $x \geq 1$

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$$

2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise la propriété précédente sur l'intervalle $[1 ; a]$ et ainsi

$$\int_1^a 0 dx \leq \int_1^a f(x) dx \leq \int_1^a e^{-x} dx$$

$$0 \leq F(a) \leq [-e^{-x}]_1^a \text{ Donc}$$

$$0 \leq F(a) \leq -e^{-a} + e^{-1} \leq e^{-1} \text{ donc : } 0 \leq F(a) \leq e^{-1}$$

ce qui démontre l'inégalité voulue.

Exercice9 :Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Solution :on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$$

$$\text{Donc : } \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^2 dx$$

$$\text{Donc : } \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \text{ Donc : } \frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$$

Exercice10 :soit la suite numérique (u_n) définie

$$\text{par : } u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Solution :1)} \quad u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \end{aligned}$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq 1-x$

$$\text{Et on a: } \frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0 \text{ car } 0 \leq x$$

$$\text{Donc : } \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$$

$$\text{Donc: } \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \geq 0$$

$$\text{Donc: } u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc: (u_n) est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n + 1} \leq 1$$

$$\text{Donc: } \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq \int_0^1 1 dx$$

$$\text{Donc: } \frac{1}{2} [x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq [x]_0^1$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice11 :soit la suite numérique (u_n)

$$\text{définie par : } u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;1] : \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

$$2) \text{ En d\u00e9duire : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{e^n} \right)$$

Exercice12 : Calculer les int\u00e9grales suivantes :

$$1) A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \quad 2) B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

$$3) C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} dx$$

$$\text{Solution : } 1) A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$2) B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^3 dx$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^4}{4} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$3) C = \int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2+1)(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{1+\frac{1}{2}} \right]_1^{\sqrt{3}} = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} (2-1) = \frac{2}{3}$$

Exercice13 : Calculer l' int\u00e9grale suivante :

$$1) I = \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad 2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$$

$$3) K = \int_1^e \ln x dx$$

$$\text{Solution : } 1) I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$\text{On pose : } u'(x) = \sin x \quad \text{et} \quad v(x) = x$$

$$\text{Donc} \quad u(x) = -\cos x \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

On a u et v deux fonctions d\u00e9rivables sur un intervalle $[0; \pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0; \pi]$

$$\text{Donc : } I = [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x dx = [-x \cos x]_0^{\pi} - [-\sin x]_0^{\pi} = \pi$$

$$2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$$

$$\text{On pose : } u'(x) = e^x \quad \text{et} \quad v(x) = x$$

$$\text{Donc} \quad u(x) = e^x \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

On a u et v deux fonctions d\u00e9rivables sur un intervalle $[0; \ln 2]$ et u' et v' sont continue sur $[0; \ln 2]$

$$\text{Donc : } J = [x e^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 1 e^x dx = \ln 2 e^{\ln 2} - [e^x]_0^{\ln 2}$$

$$J = 2 \ln 2 - (e^{\ln 2} - 1) = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

$$3) K = \int_1^e \ln x dx \quad \text{on a} \quad K = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \times \ln x dx$$

$$\text{On pose : } u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = \ln x$$

$$\text{Donc : } u(x) = x \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

On a u et v deux fonctions d\u00e9rivables sur un intervalle $[1; e]$ et u' et v' sont continue sur $[1; e]$

$$\text{Donc : } K = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e \ln e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx$$

$$K = e - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Exercice14 : En utilisant une int\u00e9gration par partie calculer :

$$1) I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad 2) J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$5) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 6) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

$$\text{Solution : } 1) I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad \text{la d\u00e9marche est la}$$

$$\text{m\u00eame : } I = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{4} [e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 3 \int_1^{e^3} x^{-\frac{5}{3}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^3} \ln x \right]_1^{e^3} - 9 \left[\frac{1}{x^3} \right]_1^{e^3} = 9$$

Exercice15 : En utilisant une intégration par partie calculer : $J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$

$$K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$$

$$M = \int_1^e x(1-\ln x) dx \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Exercice16: On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

$$\text{montrer que : } \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice17 : En utilisant une intégration par changement de variable.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} \quad \text{on pose } x = \sqrt{t}$$

$$2) I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x} + e^{2x} + 3e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \text{on pose } t = e^x$$

$$3) I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}} dt \quad \text{on pose } x = \ln t$$

$$4) I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx \quad \text{on pose } x = \frac{\pi}{4} - t$$

$$\text{Solution : } 1) I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} \quad \text{on pose } x = \sqrt{t}$$

$$\text{On a : } x = \sqrt{t} \quad \text{donc : } \begin{cases} t=1 \Rightarrow x=1 \\ t=3 \Rightarrow x=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(1+x^2)x} dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2} dt$$

$$I_1 = [2 \arctan x]_1^{\sqrt{3}} = 2 \arctan \sqrt{3} - 2 \arctan 1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$2) I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x} + e^{2x} + 3e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \text{on pose } t = e^x$$

$$\text{On a : } t = e^x \quad \text{donc : } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\ln 2 \Rightarrow t=2 \end{cases}$$

$$\frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \quad \text{on en déduit que : } \frac{dt}{t} = dx$$

$$I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x} + e^{2x} + 3e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^2 \frac{t^3 + t^2 + 3t}{1+t^2} \frac{dt}{t}$$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{t^2 + t + 3}{1+t^2} dt = \int_1^2 \left(t + \frac{3}{1+t^2} \right) dt$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{2} t^2 + 3 \arctan t \right]_1^2 \quad (\text{Continuer les calculs})$$

$$3) I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}} dt$$

$$\text{On a } I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{(\ln t)'}{\sqrt{3+\ln t}} dt \quad \text{on pose } x = \ln t$$

$$x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\text{On a : } x = \ln t \quad \text{donc : } \begin{cases} t=e^{-2} \Rightarrow x=-2 \\ t=e \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}} dt = \int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{3+x}} dx$$

On sait que: $x \rightarrow 2\sqrt{3+x}$ est une primitive de :

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3+x}} \text{ donc : } I_3 = \left[2\sqrt{3+x} \right]_{-2}^1 \text{ donc : } I_3 = 2$$

$$4) I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx \text{ on pose } x = \frac{\pi}{4} - t$$

On trouve :

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) - dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt$$

$$\text{On sait que : } \tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan t}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \tan t} = \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}$$

$$\text{Donc : } 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \frac{2}{1 + \tan t}$$

$$\text{Donc : } I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \tan t)) dt$$

$$\text{Donc : } I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln(1 + \tan t)) dt$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - I_4 \text{ Donc :}$$

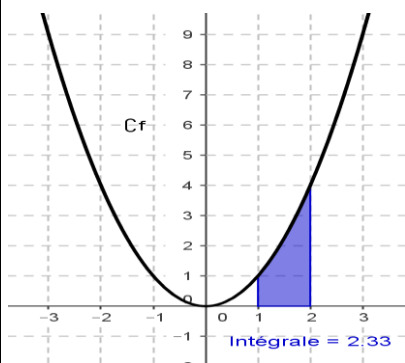
$$2I_4 = \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dt \Rightarrow 2I_4 = \frac{\pi}{4} \ln 2 \Rightarrow I_4 = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Exercice18 : $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = x^2$$

- 1) tracer C_f la courbe représentative de f
- 2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Solution :1)



$$2) f \text{ est continue et positif sur } [1;2] \text{ on a donc : } A = \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 x^2 dx = \int_1^2 x^2 dx$$

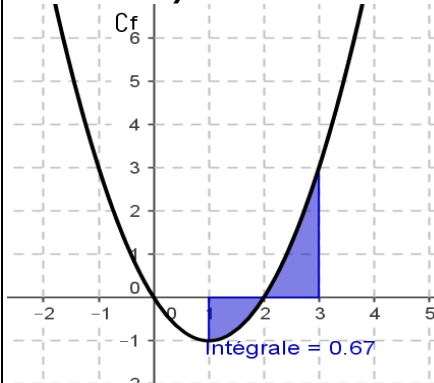
$$A = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{7}{3} \times 2cm \times 2cm = \frac{28}{3} cm^2$$

Exercice19 : $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

$$\text{Soit } f \text{ définit par : } f(x) = x^2 - 2x$$

- 1) tracer C_f la courbe représentative de f
- 2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

Solution :1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur

$$[1;3] \text{ donc : } A = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx$$

Etudions le signe de : $x^2 - 2x$ dans $[1;3]$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
x^2-2x	+	0	-	0	+

$$A = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx = \int_1^2 |x^2 - 2x| dx + \int_2^3 |x^2 - 2x| dx$$

$$A = \int_1^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 = \left[-\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + \frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3} \times 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2$$

$$= -\frac{2}{3} \times 2^3 + 8 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{27}{3} - 9 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{27}{3} - 2$$

$$A = 2 \times 2cm \times 3cm = 12cm^2$$

Exercice20 : $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ et soit } f \text{ définit par : } f(x) = 1 - e^x$$

Calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites :

$$x = \ln 2 \text{ et } x = \ln 4$$

Solution : il suffit de calculer : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx$$

On sait que : $\ln 2 \leq x \leq \ln 4$ donc : $e^{\ln 2} \leq e^x \leq e^{\ln 4}$

Donc : $2 \leq e^x \leq 4$ donc $e^x > 1$ par suite: $1 - e^x < 0$

Donc:

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} -(1 - e^x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x - 1) dx$$

$$I = [e^x - x]_{\ln 2}^{\ln 4} = (e^{\ln 4} - \ln 4) - (e^{\ln 2} - \ln 2)$$

$$I = (4 - 2 \ln 2) - (2 - \ln 2) = 4 - 2 \ln 2 - 2 + \ln 2 = 2 - \ln 2$$

Donc : $A = (2 - \ln 2) \times 2cm \times 2cm = 4(2 - \ln 2) cm^2$

Exercice21 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

calculer en cm^2 la surface du domaine limité par

: (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Solution : il suffit de calculer :

$$I = \int_1^e |f(x) - g(x)| dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} - e^{-x} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$$

Car : $\frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$

$$\text{Donc: } I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = 2 \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = [2 \ln |e^x + 1|]_0^{\ln 2}$$

Donc :

$$I = 2 \ln |e^{\ln 2} + 1| - 2 \ln |e^0 + 1| = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2}$$

Donc : $A = 2 \ln \frac{3}{2} \times 2cm \times 2cm = 8 \ln \frac{3}{2} cm^2$

Exercice22 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 0.5cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x^2 - 8x + 12$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point

$A(3; f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par :

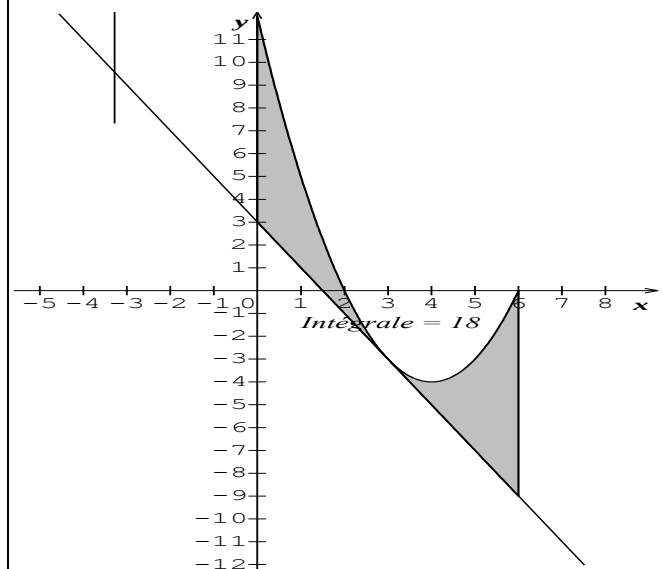
(C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe

(C_f) au point $A(3; f(3))$ est : $y = f(3) + f'(3)(x-3)$

$$f'(x) = 2x - 8 \text{ et } f'(3) = -2 \text{ et } f(3) = -3$$

$$(D): y = -2x + 3$$



il suffit de calculer :

$$I = \int_0^6 |f(x) - y| dx = \int_0^6 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_0^6 (x+3)'(x+3)^2 dx$$

$$I = \left[\frac{(x+3)^3}{3} \right]_0^6 = 18 \text{ donc :}$$

$$A = 18 \times (0.5cm)^2 = 4.5cm^2$$

Exercice 23: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 1cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

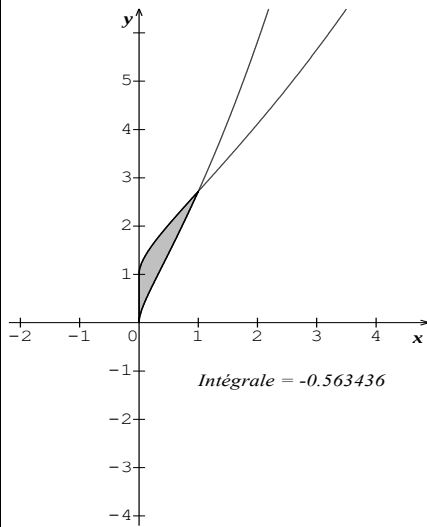
Calculer A la surface du domaine limité par :

C_f et les droites : $y = x - 1$ et $x=1$ et $x=e$

Exercice24 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Solution :



$$S = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad \text{Ua}$$

$$S = \int_0^1 |e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}| dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} |1 - \sqrt{x}| dx$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ donc :

$$0 \leq 1 - \sqrt{x} \text{ donc : } S = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx$$

On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

$$S = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx = \left[(6(\sqrt{x} - 1) - 2x) e^{\sqrt{x}} \right]_0^1$$

$$S = 6 - 2e \quad \text{Ua}$$

Exercice25 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.

2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites : $x = 0$ et $x = 1$.

3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite $(\Delta) y = x$; la courbe C_f et les droites :

$x = 0$ et $x = 1$.

Exercice26 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré

par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

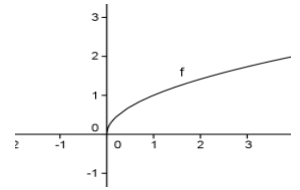
Solution : La rotation de la courbe C_f

au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$ engendre un solide :

$$I = \int_0^4 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

$$I = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \quad \text{et on a :}$$

$$u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\| = 8cm^3$$



Donc le volume est : $V = 8\pi \times 8cm^3 = 64\pi cm^3$

Exercice27 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)} \text{ et } (C) \text{ la courbe de } f$$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution : on calcul : $\int_0^1 x(e^x - 1) dx$

$$I = \int_0^1 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^1 \pi (x(e^x - 1))^2 dx = \pi \int_0^1 x(e^x - 1) dx$$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x - x$ et $v'(x) = 1$

$$\text{Donc : } \int_0^1 x(e^x - 1) dx = \left[x(e^x - x) \right]_0^1 - \int_0^1 1(e^x - x) dx$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - e + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Donc : $I = \frac{1}{2} \pi$ par suite :

$$V = \frac{1}{2} \pi \times \frac{8}{27} c^3 m = \frac{4\pi}{27} c^3 m$$

Exercice28 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1; e]$

Exercice29: $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définit par :

$$f(x) = x\sqrt{1 - \ln x} \text{ et } (C) \text{ la courbe de } f$$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1; e]$

Exercice30: En utilisant les somme de Riemann

$$\text{calculer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Solution : Pour cet exemple il faut faire apparaître les bornes (a et b) puis l'expression de la fonction f :

Si on factorise par n à l'intérieur de la somme on aura :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

et d'après cette expression on conclut que :

$$a=0 \text{ et } a=1 \text{ et } f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{On aura : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice31:

En utilisant les somme de Riemann calculer :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$$

Solution : 1)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

De l'expression on peut remarquer que :

$$a=1 \text{ et } b=2 \text{ et } f(x) = \frac{1}{x} \text{ et puisque } f \text{ est}$$

continue sur $[1; 2]$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

2) On pose (changement d'indice)

$$j = k - n \text{ on obtient : } \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n}$$

$$(n+k = n+j+n = 2n+j)$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right) + 2}$$

De l'expression on peut remarquer que :

$$a=0 \text{ et } b=1 \text{ et } f(x) = \frac{1}{2+x}$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx$$

$$= [\ln(2+x)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

De l'expression on peut remarquer que :

$$a=1 \text{ et } b=2 \text{ et } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{2} - 1)$$

Exercices 32 :

1) Calculer les limites des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2 - k^2}} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$$

2) a) Calculer en utilisant une intégration par

$$\text{partie : } \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

b) En déduire la limite de la suite :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}$$

(Introduire $\ln$ dans l'expression de u_n)

Exercice33: Déterminer la fonction primitive de la fonction $\ln x$ qui s'annule en e .

Solution : La fonction primitive de la fonction $\ln x$

qui s'annule en e est $F(x) = \int_e^x \ln t dt$ On va

procéder par une I.P.P

on a $[e; x]$ On pose : $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$

$$\text{Donc : } u(t) = t \text{ et } v'(t) = \frac{1}{t}$$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[e; x]$ et u' et v' sont continue sur $[e; x]$

Donc :

$$F(x) = \int_e^x \ln t dt = [t \ln t]_e^x - \int_e^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln x - e - \int_1^e 1 dt$$

$$F(x) = x \ln x - e - [t]_e^x = x \ln x - e - x + e = x \ln x - x$$

La fonction primitive de la fonction $\ln x$ qui

s'annule en e est : $F(x) = x \ln x - x$

Exercice34: étudier la dérivabilité de la fonction

F définit par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2} dt$ sur $\mathbb{R}^{**}$ et

calculer $F'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{**}$

Solution : est dérivable sur $\mathbb{R}^{**}$

car $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{**}$

et la fonction $f: t \rightarrow e^{-t^2}$ est Continue sur $\mathbb{R}$ soit φ une fonction primitive de f .

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2} dt = [\varphi(t)]_{\frac{1}{x}}^{\ln x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{**} \quad F'(x) = (\varphi \circ v)'(x) - (\varphi \circ u)'(x)$$

$$= v'(x) \times \varphi'(v(x)) - u'(x) \times \varphi'(u(x))$$

$$= v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$$

$$= (\ln x)' e^{-(\ln x)^2} - \left(\frac{1}{x}\right)' e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$F'(x) = \frac{1}{x} e^{-(\ln x)^2} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Exercice35: soit la fonction F définit par :

$$F(x) = \int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t} dt \quad \forall x \in [-1; +\infty[$$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction F

et calculer $F'(x) \quad \forall x \in [-1; +\infty[$

2) calculer $F(x)$ sans intégrale

Solution :

la fonction $x \rightarrow \sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1; +\infty[$

et la fonction: $v: x \rightarrow x^2+2x$ est dérivable sur

$\mathbb{R}$ et $v(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$

donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$F'(x) = v'(x) f(v(x)) = 2(x+1) \sqrt{x+1}$$

$$2) F(x) = \int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t} dt = \int_0^{x^2+2x} (1+t)' (1+t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{x^2+2x} = \left[\frac{2}{3} (1+t) \sqrt{1+t} \right]_0^{x^2+2x}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} (x+1)^2 \sqrt{x+1}$$

Exercice36: étudier les variations de la fonction

F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} (t^2 - 4) dt$

Solution : la fonction: $t \rightarrow e^{t^2} (t^2 - 4)$ est

Continue sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$

$F'(x) = e^{x^2} (x^2 - 4)$ le signe de $F'(x)$ est le signe

de $x^2 - 4$ donc :

a) Sur $[2; +\infty[$ et $]-\infty; -2]$ F est croissante

b) Sur $[-2; 2]$ F est décroissante

Exercice 37: soit h la fonction définie sur :

$$\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ par : } h(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0$$

$$\text{et } h(0) = e^2$$

1) Montrer que h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et en déduire que :

$$H : x \rightarrow \int_0^x h(t)dt \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$2) \text{calculer : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x h(t)dt$$

$$\text{Solution : 1) } h(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+2x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = e^2 = h(0) \text{ donc } h \text{ est Continue}$$

Et puisque h est la composée de fonction sur

$$\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ continues}$$

$$\text{alors } h \text{ est Continue sur } \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$\text{Donc : } H : x \rightarrow \int_0^x h(t)dt \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$2) \text{on a : } H'(x) = h(x) - h(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x h(t)dt = H'(0) = e^2$$

Exercice 38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$

$$\text{par } (\forall t \in]0, +\infty[) (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}})$$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$

$$\text{par : } F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[)$:

$$(f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$$

$$\text{b) En déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) (e^t \geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1) : \ln$

$$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$$

4) a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) (\ln t \leq t - 1)$

$$\text{b) En déduire que } (\forall x > 1) (F(x) - 1 \geq \ln \left(\frac{x}{x-1} \right))$$

$$\text{c) En déduire } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$$

5) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 1$

6) Dresser le tableau de variation de la Fonction F

7) Construire la courbe CF .

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et
exercices*

Que l'on devient un mathématicien

