

CALCULS INTEGRALES

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC SM

I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I . Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle l'intégrale de la fonction f entre a et b on écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

on lit somme $f(x)dx$ de a à b et on l'appelle intégrale de a à b . Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure **Remarque :** la variable t est une variable muette, on peut le changer par n'importe qu'elle variable

Propriété1 : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ existe et finie.

Propriété2 : Soient f, g et f' des fonctions continues sur un intervalle I , a, b et c trois éléments de I et α un réel, on a

$$1) \int_a^b f'(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$2) \int_a^b \alpha dx = [\alpha x]_a^b = \alpha(b-a) \quad 3) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$4) \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$5) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$6) \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \text{ (linéarité)}$$

$$7) \int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \text{ (linéarité)}$$

Intégrales et ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$

1) Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2) Si $(\forall x \in [a; b]); f(x) \leq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$3) \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

II) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

si f est une fonction continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$ alors il existe au moins un réel c dans

$$[a; b]. \text{ Tel que : } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ S'appelle La valeur moyenne de f sur $[a; b]$

III) TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + c$
$x^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times \arctan(x) + c$

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u^n u' \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C^{te}$
$u^n \sqrt{u} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1} \sqrt{u^{n+1}} + C^{te}$
$u' u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'$ ou	$v' u + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u) + C$

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

2) Intégration par partie :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

3) Intégration par changement de variable :

Soient g une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que g' continue sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur $g([a, b])$ on a :

$$\int_a^b (f \circ g)(t) \cdot g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \cdot dx$$

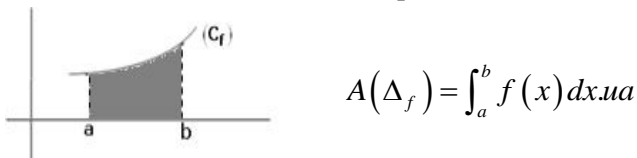
Cette propriété s'appelle propriété du changement de variable.

IV) INTEGRALE ET SURFACE.

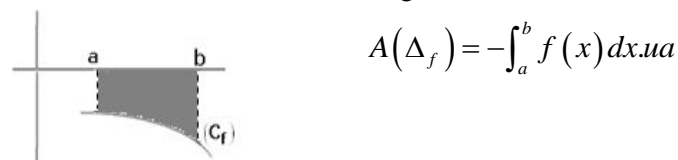
1) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation :

$$x = a \text{ et } x = b \quad \text{est : } A(\Delta_f) = \int_a^b |f(x)|dx \text{ ua}$$

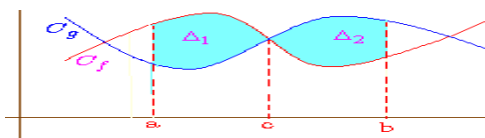
2) Si si f une fonction continue et positif sur $[a ; b]$



3) si f une fonction continue et négatif sur $[a ; b]$



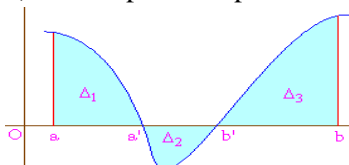
4) Si on a par exemple :



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

5) Si on a par exemple :



$$A(\Delta) = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{b'} -f(x)dx + \int_{b'}^b f(x)dx$$

V) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES

Propriété1 : Soit (S) un solide compris entre les plans

$$Z = a \text{ et } z = b$$

le volume par unité de volume du solide (S) est :

$$V_{(S)} = \int_a^b S(t)dt \text{ Où } S(t) \text{ est la surface de l'intersection du solide } S \text{ et du plan } z = t$$

Propriété2 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des

$$\text{abscisses engendre un solide de volume } V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

$u.v$ (par unité de volume)

$$\text{si le repere est : } (o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \quad u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\|$$

VI) SOMMES DE RIEMANN

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$; $a < b$

$$\text{On pose : } s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et}$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Les sommes s_n et S_n s'appelle les somme de Riemann.

Les suites $(s_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont convergentes et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

VII) DERIVATION DE $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

1) Soit f une fonction continue sur I

et $a \in I$; la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ est la fonction primitive de la fonction } f$$

qui s'annule en a . La fonction F est dérivable sur I

$$\text{et } (\forall x \in I) (F'(x) = f(x))$$

2) Dérivée de la fonction $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Soit f une fonction continue sur un intervalle J

u et v deux fonctions définie, dérivable sur I telles que :

$$u(I) \subset J \text{ et } v(I) \subset J. \text{ La fonction } F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

est dérivable sur I

$$\text{et : } (\forall x \in I) (F'(x) = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x)))$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

