Exercice 1

Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$; $x>1$ et $F(1)=\ln 2$

1) on considère f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(t)=\frac{t-1}{\ln t}$; $x>1$ et $f(1)=1$

a) montrer que f est continue sur $[1,+\infty[$

b) en utilisant le théorème des accroissement finis montrer que $\forall t\in\,]1,+\infty[\;\; \ln t\geq\frac{t-1}{t}$

c) étudier les variations de f

2) a) montrer que $(\forall x>1)\;\; I(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}=\ln 2$

b) montrer que $(\forall x\in\,]1,+\infty[)\;\; 0\leq F(x)-I(x)\leq\frac{1}{2}(x^2-1)$

c) en déduire que F est continue à droite de $x_0=1$

3) a) montrer que $(\forall x\in\,]1,+\infty[)\;\; \frac{1}{2}\frac{x^2-x}{\ln x}\leq F(x)\leq\frac{x^2-x}{\ln x}$ déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

b) étudier la branche infinie de (C) la courbe de F

4) a) montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $F'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$

b) montrer que F est dérivable à droite de 1 et déterminer le nombre dérivé

c) étudier le sens de variation de F et dresser le tableau de variations

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$; $x\neq 0$ et $f(0)=\ln 2$

1) calculer $\int_x^{2x}\frac{dt}{t}$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ puis montrer que f est continue à droite de $x_0=0$

2) a) prouver que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\;\; f(x)\geq\frac{e^{2x}-e^x}{2x}$

b) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$

3) a) montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $f'(x)$

b) étudier les variations de f

4) a) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\;\; \frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{e^t-1}{t}dt$

b) montrer que la fonction $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

c) en déduire que f est dérivable à droite de $x_0=0$ et $f_d'(0)=1$

5) tracer la courbe (C_f)