

Exercice 1

Etude d'une primitive

I] Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) montrer que f est continue sur \mathbb{R}
- 2) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) 1 + (x - 1)e^x \geq 0$
- b) calculer $f'(x)$ pour tout x de \mathbb{R}^* et étudier le sens de variation de f

II] On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt ; x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$
- b) déduire que F est continue au point d'abscisse 0
- c) montrer que F est dérivable au point 0 et que $F'(0) = 1$
- 2) a) montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* et que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) F'(x) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$
- b) donner le tableau de variation de la fonction F

Exercice 2

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_x^{4x} \frac{\ln t}{2t - 1} dt$

- 1) montrer que F est définie sur $D = \left]0, \frac{1}{8}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
- 2) montrer F est dérivable sur D et calculer $F'(x)$
- 3) soit x un élément de $\left]1, +\infty\right[$
 - a) montrer $(\exists c \in [x, 4x]) F(x) = \frac{3x \ln c}{2c - 1}$
 - b) déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$
- 4) soit x un élément de $\left]0, \frac{1}{16}\right[$. montrer que $|F(x)| \leq -\int_x^{4x} 2 \ln t dt$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\left]0, +\infty\right[$ par : $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt$

- 1) déterminer le signe de $f(x)$
- 2) montrer que f est dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ et calculer $f'(x)$
- 3) a) montrer que $(\forall x > 1) f(x) \geq \frac{1}{2} \ln x$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) montrer que $(\forall x \in]0, 1[)$ $f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$ et calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Fonction définie par intégrale

4) donner le tableau de variation de f

5) montrer que $(\forall x > 1)$ $f(x) \geq \frac{e^{\sqrt{x}} - e}{\sqrt{x}}$ puis déduire la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

Exercice 4

I) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$

1) a) étudier le sens de variation de g

b) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et donner le tableau de variation de g

2) déduire le signe de $g(x)$ et que $x_0 = 0$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$

II) On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(0) = \frac{1}{2} \ln 2$ et $\forall x > 0$ $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{g(t)} dt$

1) montrer que $\forall t > 0$; $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{g(t)} \leq \frac{1}{t}$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

2) a) montrer que $\forall t > 0$: $1-t \leq e^{-t} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$

b) montrer que $\forall t \in]0, 4[$; $\frac{1}{2t} \leq \frac{1}{g(t)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$ puis déduire que F est continue à droite de 0

3) a) montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer $F'(x)$

b) étudier le sens de variation de F

Exercice 5

I) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

1) calculer les limites de f

2) étudier le sens de variation de f

3) étudier les branches infinies de (C_f)

II) On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt$; $x > 0$ et $F(0) = 2 \ln 2$

1) a) vérifier que $(\forall x > 0)$ $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln 2$

b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $e^x \geq x + 1$ et déduire $(\forall t > 0)$ $-t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$

2) a) montrer que $(\forall x > 0)$ $-3x^2 \leq F(x) - 2 \ln 2 \leq 0$

b) montrer que F est continue, dérivable à droite de 0

3) montrer que $(\forall t \geq 1)$: $f(t) \leq e^{-t}$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

4) a) montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$

b) donner le tableau de variation de F

5) tracer la courbe

Exercice 6

Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $G(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+t} dt$; $x > 0$ et $G(0) = 0$

- 1) a) montrer que $\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right) \left(\exists c \in [x, 2x] \right) G(x) = \frac{x \ln c}{1+c}$
- b) déduire que $\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right) \frac{x \ln x}{1+x} \leq G(x) \leq \frac{x \ln 2x}{1+2x}$
- c) étudier la continuité et la dérивabilité de G à droite de 0
- 2) On pose $\varphi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ pour tout x de $[0, +\infty[$
 - a) montrer que $\left(\forall x \in \left]0, +\infty\right[\right) G(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$
 - b) montrer que G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $G'(x) = \frac{\ln x + (1+x)\ln 4}{(1+x)(1+2x)}$
- 3) a) montrer que $\left(\forall x > 1 \right) \left(\exists d \in [x, 2x] \right) G(x) = \frac{x \ln d}{1+d}$ (utiliser le théorème des accroissements finis)
- b) montrer que $\left(\forall x > 1 \right) \frac{x \ln x}{1+2x} \leq G(x) \leq \frac{x \ln 2x}{1+x}$
- c) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$ donner une interprétation géométrique du résultat
- 4) on pose $h(x) = \ln x + (x+1)\ln 4$
 - a) montrer que $h(x) = 0$ admet un unique solution α et que l'on a $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{4}$
 - b) déduire le signe de $h(x)$ puis dresser le tableau de variation de G

Exercice 7

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x e^{-\frac{1}{t}} \ln t dt$

- 1) a) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R} \right) e^{-x} \geq 1 - x$ et déduire $\left(\forall t \geq 1 \right) e^{-\frac{1}{t}} \ln t \geq \ln t - \frac{\ln t}{t}$
- b) calculer $I = \int_1^x \ln t dt$ et déduire $\left(\forall x > 1 \right) F(x) \geq x \ln x - x + 1 - \frac{1}{2}(\ln x)^2$
- 2) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$
- 3) montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer la dérivée $F'(x)$