FONCTIONS PRIMITIVES

I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION

1) Activités :

Activité 1 :

1- Déterminer une fonction qui admet pour fonction dérivée la fonction $f(x) = 2x^3 - x^2$

2- Déterminer une fonction qui admet pour fonction dérivée la fonction : $g(x) = \frac{3}{1+x^2}$.

3- a) Soit la fonction $H(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\pi}{4}$; vérifier que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})(H'(x) = \cos(2x)$

La fonction H s'appelle **une fonction primitive** de la fonction $h(x) = \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que $H_1(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 10$ est aussi une fonction primitive pour la fonction h

c) Donner une expression de toutes les fonctions primitives de h

Activité 2 :

Soient F une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I c'est-à-dire $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

et G une fonction **primitive** de la fonction g sur l'intervalle I, α et β deux réels.

1- Montrer que $(\alpha F + \beta G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha f + \beta g)$ sur I.

2- Soient F_1 et F_2 deux fonctions **primitives** de la fonction f sur l'intervalle I ; Montrer que :

$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$ où λ est un réel quelconque.

3- Démontrer que si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

2) Définition et propriétés

Définition :

Soit f une fonction définir sur un intervalle I ; On dit que la fonction F est une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I si :

- F est dérivable sur I
- $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

Théorème :(admis)

Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

Remarque :

La continuité dans le théorème précédent est une condition suffisante qui n'est pas nécessaire.

Exemples :

❶ Soit $\begin{cases} f(x) = 2x sin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- Vérifier que f n'est pas continue en 0

2- Soit $F(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la forme :$F+\lambda$ où λ est un réel.

Propriété :

Si F_1 et F_2 sont deux fonction primitive d'une fonction f sur I alors $(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemple de fonction qui n'admet pas de primitive

Soit la fonction f définie par ; $\begin{cases} f(x) = 2x+1 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = 2x-1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Montrons que f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Remarquez que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; (elle n'est pas continue en 1)

$F_1(x) = x^2 + x + \lambda_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]-\infty, 1]$.

$F_2(x) = x^2 - x + \lambda_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ alors ils existent $\lambda_1$et λ_2 tels que : $\begin{cases} F(x) = x^2 + x + \lambda_1 \text{ si } x \leq 1 \\ F(x) = x^2 - x + \lambda_2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

et que F soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(F'(x) = f(x))$

On a F est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $(\forall x \in]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$

et F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$

Le problème il faut déterminer (s'ils existent) $\lambda_1$et λ_2 dans $\mathbb{R}$ pour que F soit dérivable en 1 et que :

$F'(1) = f(1) = 3.$

On a $F(1) = 2 + \lambda_1$

d'autre par pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = F(1)$ on en déduit que $2 + \lambda_1 = \lambda_2$ d'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+\lambda_1-2-\lambda_1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3 = F'_d(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x+\lambda_2-2-\lambda_1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x-2+\lambda_2-\lambda_1}{x-1} \quad (\lambda_2 = 2+\lambda_1) \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x-2+2+\lambda_1-\lambda_1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{x-1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 = F_g{}'(1)$$

Donc pour tous réels $\lambda_1$et λ_2 ; $F_d'(1) = 3 \neq 1 = F_g{}'(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Propriété :

Si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

Exercice :

Déterminer la fonction primitive de la fonction $f(x) = 2x^2 + x + 1$ et qui s'annule en 3

Propriété :

Si F est une fonction **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction **primitive** de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :

- $(F + G)$ est une fonction **primitive** de la fonction $(f + g)$sur I
- (αF) est une fonction **primitive** de la fonction (αf) sur I

Remarque :

Ce sont **les seules opérations sur les fonctions primitives.**

3) Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive	Intervalles
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$	$\mathbb{R}^+$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^+$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$\mathbb{R}^{*+}$
$sin(ax + b)$	$\frac{-1}{a} cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$

4) Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$

Cette ligne est une généralisation des 4 lignes précédentes

5) Application :

5.1 Primitives directe

❶ Déterminons une fonction primitive de $f(x) = 7x\sqrt[3]{3x^2+5}$

On doit remarquer que la fonction $u(x) = 3x^2 + 5$ donc $u'(x) = 6x$

et par suite $f(x) = \frac{7}{6} \times 6x \times \sqrt[3]{2x^2+5}$

$= \frac{7}{6}(3x^2+5)' \times \sqrt[3]{2x^2+5}$ (c'est de la forme : $u'\sqrt[n]{u}$ $(n=3)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent de la forme : $F(x) = \frac{7}{6} \times \frac{3}{4}\sqrt[3]{(3x^2+5)^4} + C = \frac{7}{8}\sqrt[3]{(3x^2+5)^4} + C$

❷Déterminons une fonction primitive de $g(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$

On doit remarquer que la fonction $u(x) = 2x^2 + x$ donc $u'(x) = 4x + 1$

Et par suite : $g(x) = \frac{(2x^2+x)'}{(2x^2+x)^4}$

$= (2x^2+x)' \times (2x^2+x)^{-4}$ (c'est de la forme : $u'u^r$ $(r=-4)$)

Donc les fonctions primitives de g s'écrivent de la forme : $G(x) = \frac{1}{-4+1}(2x^2+x)^{-4+1} + C = \frac{1}{3(2x^2+x)^3} + C$

❸ Déterminons une fonction primitive de $h(x) = 7x\, cos(\pi x^2 + 3)$

On pose $u(x) = \pi x^2 + 3$ donc $u'(x) = 2\pi x$ et par suite :

$h(x) = 7x\, cos(\pi x^2+3)$

$= \frac{7}{2\pi} \times 2\pi x \times cos(\pi x^2+3)$

$= \frac{7}{2\pi}(\pi x^2+3)' \times cos(\pi x^2+3)$ (C'est de la forme : $u' \times vou$)

Donc les fonctions primitives de h s'écrivent de la forme : $H(x) = \frac{7}{2\pi}\, sin(\pi x^2+3) + C$

5.2) Autres situations :

Malheureusement ce n'est pas toujours aussi "directe" ; Par fois il faut faire d'autres calcules.

① Déterminons une fonction primitive de $h(x) = \frac{2}{x^2+2x+4}$

A remarquer que $h(x) = \frac{2}{(x+1)^2+3}$ ce que nous laisse à penser à la fonction $arctan$

$h(x) = \frac{2}{(x+1)^2+3}$

$= \frac{2}{3[\frac{1}{3}(x+1)^2+1]}$

$= \frac{1}{3}\frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$ (C'est de la forme : $\frac{u'}{u^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction h sont les fonctions : $H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$

On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :$\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est strictement négatif.

Exercice : Déterminer les fonctions primitives des fonctions $u(x) = \frac{5}{x^2+x+1}$

Remarque :

- ✓ Si le discriminant **Δ est strictement positif**, il faut factoriser $ax^2 + bx + c$ et on va faire appel à d'autre fonctions qu'on va voir par la suite.
- ✓ Si le discriminant Δ est nul : on utilise la forme $\frac{u'}{u^2}$ comme application : Déterminer les fonctions primitives de la fonction $f(x) = \frac{6}{4x^2+4x+1}$

Exercices :

Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

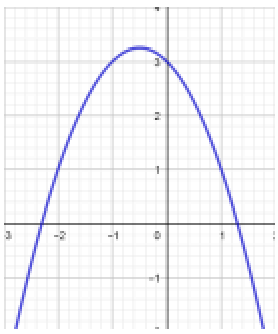
1. $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+1}$
2. $g(x) = \frac{sinx}{\sqrt[3]{2+cosx}}$
3. $k(x) = tan^2x$
4. $u(x) = cos^4 x$ (utiliser : $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$)
5. $v(x) = sin^3 x$ (Remarquer que : $sin^3 x = sinx\ sin^2x$)

II) THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)

1) Approche :

1.1 Activités

Activité 1 :



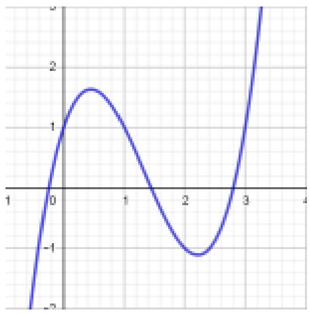
La courbe ci-contre est la courbe de la fonctions : $f(x) = -x^2 - x + 3$

1- Vérifier que $f(-2) = f(1)$.

2- Trouver le réel c dans $]-2,1[$ tel que $f'(c) = 0$

3- Interpréter géométriquement résultat.

Activité 2 :



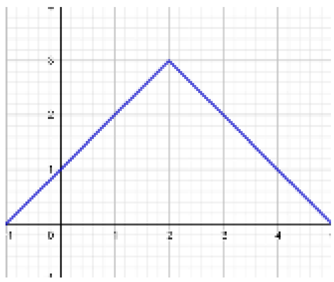
La courbe ci-contre est la courbe de la fonction $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

1- vérifier que : $g(0) = g(3)$.

2- Déterminer les réels c_1 et c_2 dans $]0,3[$ tels que $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$

3- Interpréter géométriquement résultat.

Activité 3 :



Dans la courbe ci-contre on a $f(0) = f(4)$

Quelle est la valeur logique de l'assertion :$(\exists c \in]0,4[)(f'(c) = 0)$?

2) Le théorème :

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Preuve :

Puisque f est continue alors ils existent m et M dans $\mathbb{R}$ tels que :$f([a,b]) = [m,M]$, où $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

- Si $m = M$ alors f est constante sur $[a,b]$ d'où $(\forall x \in]a,b[)(f'(x) = 0)$
- Si $m \neq M$ (alors $m < M$) on a alors $f(a) > m$ ou $f(a) < M$.
  - Si $m < f(a)$ alors : il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f(c) = m$

$$(\forall x \in]a,c[)\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-m}{x-c} \leq 0\right)$$

et donc $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f_g'(c) \leq 0$

D'autre part :

$$(\forall x \in]c,b[)\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-m}{x-c} \geq 0\right)$$

et donc $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f_d'(c) \geq 0$

et puisque f est dérivable en c alors $f_d'(c) = f_g'(c) = 0$

  - Si $f(a) < M$ même démonstration.

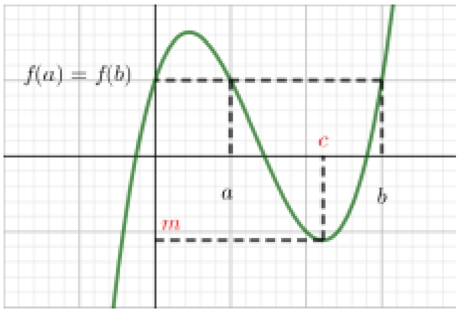


figure 1

Remarque :

- Il n'y a pas, a priori, unicité du point c tel que $f'(c) = 0$. *figure* 1
- La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ nous donne un exemple de situation

où f n'est pas dérivable au bord. *figure* 2

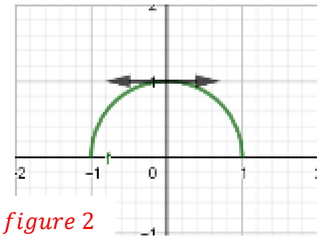


figure 2

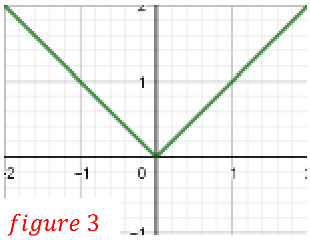


figure 3

- Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable sur $]a,b[$ tout entier comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ *figure* 3

3) Applications du théorème

Exercice 1 :

Soit P la fonction polynômiale définie par : $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$.

Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$

Exercice 2 :

Soit $f : R \to R$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{sinx+cosx}{1+cos^2x}$,

Montrer que, pour tout $a \in R$, la fonctions f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Exercice 3 :

Considérons une fonction f continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) - f(1) = -1$.

Montrer en utilisant le théorème de Rolle $(\exists c \in]0,1[)\left(\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2}\right)$

Indication : $\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2} \Leftrightarrow f'(c) - \frac{4c}{(c^2+1)^2} = 0$

Considérer $g(x) = f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ déterminer une fonction G fonction primitive de g et appliquer Rolle sur G.

Exercice 4 : *Détermination d'une limite.*

Considérons les deux fonctions : $u(t) = Arctan(t) - t$ et $v(t) = t^2$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$

1- Montrer qu'il existe c compris entre 0 et x tel que : $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u\prime(c)}{v\prime(c)}$

2- En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arctan(t)-t}{t^2}$

Indication : $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u\prime(c)}{v\prime(c)} \Leftrightarrow u(x).v'(c) - v(x).u'(t) = 0$

Considérer la fonction : $g(t) = u(x).v(t) - v(x).u(t)$ sur $[a, b]$ où $\begin{cases} a = \inf(x, 0) \\ b = \sup(x, 0) \end{cases}$

Exercice 5 : *Convergence d'une suite :*

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)$.

1- En utilisant le T.A.F sur la fonction $f(x) = x\sqrt{x}$ sur les intervalles $[k, k+1]$; montrer que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3n\sqrt{n}} \leq u_n - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

2- En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

4) Inégalité des accroissements finies I.A.F :

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f **est dérivable sur *I*** et $(\forall x \in I)(|f'(x)| \leq k$ (où $k \in \mathbb{R}^{*+}$)

$(\forall (x, y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$

Preuve :

Soient x et y deux éléments de I

Si $x \neq y$

On a f est continue sur l'intervalle fermé de borne x et y et dérivable sur l'ouvert de borne x et y.

Donc, et d'après le T. A.F , il existe c compris entre x et y tel que : $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ et puisque $c \in I$ alors :$|f'(c)| \leq k$; donc :

$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq k|x - y|$

Si $x = y$ l'inégalité est vraie.

D'où la preuve du théorème.

Exercice

En utilisant le I.A.F, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(|sinx| \leq |x|$

Applique le I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et

Applique le I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et .