

1

Le plan (P) est muni d'un r.o.d

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; on considère les points $A(-2+3i)$ et $B(1-3i)$. Soit $M(z)$ un point du plan tel que

$$z \neq -2+3i \text{ et on pose } z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i}$$

1) déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{MA, MB})$

en fonction de argument de z'

2) a) déterminer et construire les ensembles :

$$E_1 = \left\{ M(z) / \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$$

$$\text{et } E_2 = \{ M(z) / |z'| = 2 \}$$

b) déterminer l'affixe de F point

d'intersection des deux ensembles E_2 et E_1

2

On pose $g(z) = \frac{1-z}{z}$ pour tout z de \mathbb{C}^*

1) résoudre dans \mathbb{C} l'équation $g(z) = 1-i$

2) a) montrer que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}^*) \quad g(z) = \overline{g(\bar{z})} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$$

b) en déduire l'ensemble :

$$E = \{ M(z) \in (P) / g(z) \in \mathbb{R} \}$$

3) on pose $z = r e^{i\theta}$ où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\text{Montrer que } 1 - \cos \theta = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

puis déterminer $g(z)$ sous forme trigonométrique

3

Le plan (P) est muni d'un repère

orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. on pose $Z' = \frac{i(z+i)}{z-i}$

pour tout z de $\mathbb{C} - \{i\}$ et on considère

les points $M(z)$ et $M'(Z')$

1) montrer que :

$$(\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}) \quad Z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

2) a) montrer que :

$$(\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}) \quad Z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$$

b) en déduire l'ensemble des points $M(z)$

pour lesquels le nombre Z' est réel

3) montrer que :

$$(\forall z \in \mathbb{C} - \{i, -i\}) \quad \arg(Z') = \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) [2\pi]$$

puis déduire l'ensemble des points $M(z)$

tels que $Z' \in \mathbb{R}^{-*}$

4) soit F l'application du plan (P) qui à tout point $M(z)$ fait associer le point $M'(Z')$

Montrer que $Z' - i = -\frac{2}{z-i}$ en déduire l'image du cercle (ζ) de centre $A(i)$ et de rayon r

5) soit n un entier tel que $n > 2$.

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) $(Z')^n = i^n$

a) vérifier que $(E) \Leftrightarrow (z+i)^n = (z-i)^n$

en déduire que les images des solutions de (E) sont alignés

b) montrer que les solutions de (E) s'écrivent

$$\cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{où } k \in \{1, \dots, n-1\}$$