

Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 1)

Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} \quad z_5 = (1+i)^{10}$$

Solution :1)

$$z_1 = -6+5i = a+bi \text{ donc } \operatorname{Re}(z_1) = -6 \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = 5$$

$$2) \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$$

$$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$$

car $\operatorname{Im}(z_2) = 0$

$$3) \quad z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$$

$$z_3 = \frac{6}{10} - \frac{8i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5} \text{ donc } \operatorname{Re}(z_1) = \frac{3}{5} \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = -\frac{4}{5}$$

$$4) \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$$

$$5) \quad z_5 = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (1^2 + 2i \times 1 + i^2)^5 = (2i)^5$$

$$z_5 = (2i)^5 = 2^5 \times i^5 = 32 \times (i^2)^2 \times i = 32i$$

est un imaginaire pur car $\operatorname{Re}(z_5) = 0$

Exercice 2 : soient dans le plan complexe les

points : $A(1+i)$ et $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A, B et C sont alignés.

Solutions :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{1}{2} + 2i - i}{-1 - i - i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-1 - 2i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-2\left(\frac{1}{2} + i\right)} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc : les les points A, B et C sont alignés

Exercice 3 : soient dans le plan complexe les

points : $A(2;-3)$ et $B(1;1)$ et $C(1;2)$

1) Déterminer les affixes des points A et B et C ?

2) Déterminer l'afixe du vecteur \overrightarrow{AB}

3) Déterminer l'afixe de I , milieu de $[AB]$.

4) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'afixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solutions : 1) l'afixe du point A est $z_A = 2 - 3i$

l'afixe du point B est $z_B = 1 + i$

l'afixe du point C est $z_C = 1 + 2i$

$$2) \quad \operatorname{aff}(\overrightarrow{AB}) = \operatorname{aff}(B) - \operatorname{aff}(A) = z_B - z_A$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (1+i) - (2-3i) = -1+4i$$

$$3) \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2-3i+1+i}{2} = \frac{3-2i}{2} = \frac{3}{2} - i$$

$$4) \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1+2i) - (2-3i)}{(1+i) - (2-3i)} = \frac{-1+5i}{-1+4i}$$

$$= \frac{(-1+5i)(-1-4i)}{(-1-4i)(-1+4i)} = \frac{1+4i-5i+20}{(-1)^2 - (4i)^2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{21-i}{17} = \frac{21}{17} - \frac{1}{17}i \notin \mathbb{R}$$

Donc : les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$?

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2z_A - 1z_B + 3z_C}{2-1+3}$$

$$z_G = \frac{2(2-3i) - 1(1+i) + 3(1+2i)}{2-1+3} = \frac{6-i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}i$$

6) ABCD est un parallélogramme si et seulement

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire : $z_B - z_A = z_C - z_D$

$$z_D = z_C + z_A - z_B$$

On en déduit en remplaçant par les données :

$$z_D = 1 + 2i + 2 - 3i - 1 - i = 2 - 2i$$

Exercice 4 : soient dans le plan complexe les points : A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$$z_A = 1 + i \text{ et } z_B = 3 + 2i \text{ et } z_C = 2 - i \text{ et } z_D = -2i$$

$$\text{et } z_E = 2$$

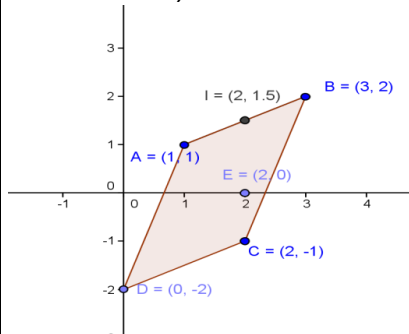
1) Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'abscisse de I milieu de [AB].

3) Déterminer l'abscisse du vecteur \overrightarrow{AB}

4) montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

Solution : 1)



I milieu de [AB]. Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc $z_I - z_A = z_B - z_I$

$$\text{Donc : } z_I = \frac{z_B + z_A}{2} \text{ donc : } z_I = \frac{3 + 2i + 1 + i}{2} = 2 + \frac{3}{2}i$$

$$\text{Donc : } I\left(2; \frac{3}{2}\right)$$

$$3) z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (1 + i) = 3 + 2i - 1 - i = 2 + i$$

4) il suffit de montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{On a : } z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + i$$

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2 - i - (-2i) = 2 + i$$

$$\text{Donc : } z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \text{ par suite : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Donc : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

Exercice 5 : Démontrer que $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$ est un nombre réel.

Solution : On a :

$$\overline{S} = \overline{(1+i)^5 + (1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + (1-i)^5$$

$$\overline{S} = (1-i)^5 + (1+i)^5 = S$$

S est donc bien un nombre réel.

$$\text{Exercice 6 : on pose : } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } S = j^{2n} - j^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$1) \text{montrer que : } j^2 = \overline{j}$$

$$2) \text{Démontrer que : } S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Solution : 1)

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$$

$$2) \text{il suffit de montrer que : } S + \overline{S} = 0$$

$$S + \overline{S} = j^{2n} - j^n + \overline{j^{2n} - j^n} = (j^2)^n - j^n + \overline{(j^2)^n - j^n}$$

$$S + \overline{S} = (\overline{j})^n - j^n + \overline{(\overline{j})^n - j^n} = (\overline{j})^n - j^n + \overline{(\overline{j})^n} - \overline{j^n}$$

$$S + \overline{S} = \overline{j}^n - j^n + j^n - \overline{j}^n = 0$$

S est donc bien un imaginaire pur

Exercice 7 : soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u \notin \mathbb{R}$

$$\text{Montrer que : } (\forall z \in \mathbb{C}) \quad |1 + uz| = |1 + \overline{u} \cdot z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\text{Solution : 1) soit } z \in \mathbb{C} \text{ tel que : } |1 + uz| = |1 + \overline{u} \cdot z|$$

$$\text{Donc : } |1 + uz|^2 = |1 + \overline{u} \cdot z|^2$$

$$\text{Donc : } (1 + uz)(\overline{1 + uz}) = (1 + \overline{u} \cdot z)(\overline{1 + \overline{u} \cdot z})$$

$$\text{Donc : } (1 + uz)(1 + \overline{u}\overline{z}) = (1 + \overline{u} \cdot z)(1 + u\overline{z}) \text{ Car : } \overline{\overline{u}} = u$$

$$\text{Donc : } 1 + uz + \overline{u}\overline{z} + u\overline{u}\overline{z}z = 1 + u\overline{z} + \overline{u}z + u\overline{u}\overline{z}z$$

Donc : $uz + \bar{u}\bar{z} = u\bar{z} + \bar{u}z$

Donc : $(u - \bar{u})z + (\bar{u} - u)\bar{z} = 0$

Donc : $(u - \bar{u})(z - \bar{z}) = 0$

Et puisque : $u - \bar{u} \neq 0$ car $u \notin \mathbb{R}$

Donc : $z - \bar{z} = 0$ Donc : $z = \bar{z}$

Donc : $z \in \mathbb{R}$

Exercice8: $z \in \mathbb{C}$

Ecrire en fonction de \bar{z} le conjugué des nombres complexes suivants :

1) $Z_1 = (2+i)(5-i)$ 2) $Z_2 = 2z + 5i$ 3) $Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$

Solution :

1) $\bar{Z}_1 = \overline{(2+i)(5-i)} = \overline{(2+i)} \times \overline{(5-i)} = (2-i)(5+i)$

2) $\bar{Z}_2 = \overline{2z + 5i} = \overline{2z} + \overline{5i} = 2\bar{z} - 5i$

3) $\bar{Z}_3 = \overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i}\right)} = \frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}} = \frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$

Exercice 9: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$ 2) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$

Solution : 1) $z \in \mathbb{C}$

donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \Leftrightarrow 2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 4i$

$(2x + y) + i(2y + x) = 5 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x + 2x + y = 8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{3}$

Donc : $x = \frac{14}{3}$ par suite: $z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$

Donc : $S = \left\{ \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \right\}$

2) $z \in \mathbb{C}$ donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$z = 2\bar{z} - 2 + 6i \Leftrightarrow x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i$

Donc : $S = \{2 + 2i\}$

Exercice10 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Solution : 1) $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $U = (x + yi - 2i)(x - yi - 1)$

Donc : $U = (x + i(y - 2))((x - 1) - yi)$

Donc : $U = (x^2 + y^2 - x - 2y) + i(-y - 2x + 2)$

Donc : $\text{Re}(U) = x^2 + y^2 - x - 2y$ et $\text{Im}(U) = -y - 2x + 2$

2) U est réel ssi $\text{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : -y - 2x + 2 = 0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta) : -y - 2x + 2 = 0$

3) U est imaginaire pur ssi $\text{Re}(U) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times 1y + 1^2 - 1^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur est le cercle de centre : $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$ et de rayon : $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice11 :

A) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $2z - 3\bar{z} + 1 + 2i = 0$ 2) $z + (1-i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$

3) $(3+i)z + \bar{z} = -i$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1) $(E1) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$

2) $(E2) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$

Exercice12 : Démontrer que :

$S = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} - (i-\sqrt{3})^{2n+1}$ est un nombre réel $\forall n \in \mathbb{Z}$

Solution : On a :

$(i-\sqrt{3})^{2n+1} = (-\sqrt{3}-i)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} \times (\sqrt{3}-i)^{2n+1}$

Donc: $(i-\sqrt{3})^{2n+1} = -(\sqrt{3}-i)^{2n+1}$ car $(-1)^{2n+1} = -1$

Donc : $S = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} + (\sqrt{3}-i)^{2n+1}$

$\bar{S} = \overline{(\sqrt{3}+i)^{2n+1} - (i-\sqrt{3})^{2n+1}} = \overline{(\sqrt{3}+i)^{2n+1}} - \overline{(i-\sqrt{3})^{2n+1}}$

$\bar{S} = (\sqrt{3}-i)^{2n+1} - (-\sqrt{3}-i)^{2n+1} = (\sqrt{3}-i)^{2n+1} + (\sqrt{3}+i)^{2n+1}$

Donc : $\bar{S} = S$

donc S est bien un nombre réel.

Exercice13 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre

complexe z et on pose : $U = 2iz - \bar{z}$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

Solution : 1) $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $U = 2i(x + yi) - (x - yi) = 2ix - 2y - x + yi$

Donc : $U = (-2y - x) + i(y + 2x)$

Donc : $\text{Re}(U) = -2y - x$ et $\text{Im}(U) = y + 2x$

2) U est réel ssi $\text{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta): y + 2x = 0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta): y = -2x$

Exercice 14 : calculer le module des nombres

complexes suivants : 1) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $z' = 3 - 4i$

Solution :

$|z| = \left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$|z'| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5; |-2i| = \sqrt{(-2)^2} = 2$

Exercice15 :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1) $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ 2) $z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i$ 3) $z_2 = \frac{1}{1+i}$

4) $z_4 = x$ où $x \in \mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1) $u_1 = \frac{2+5i}{1+3i}$ 2) $u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$ 3) $u_3 = (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+i)$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$

tels que : $A(z)$; $B(\frac{1}{z})$ et $C(\frac{1}{z})$ soit alignés.

Exercice16 : calculer le module des nombres

complexes suivants : 1) $z_1 = 5(1+i\sqrt{3})$

$$2) z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) \quad 3) z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^3$$

Solution :

$$1) |z_1| = |-5(1+i\sqrt{3})| = |-5| |1+i\sqrt{3}| = 5\sqrt{1+3} = 10$$

$$2) |z_2| = |(1+i)(\sqrt{3}-i)| = |1+i| \times |\sqrt{3}-i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$3) |z_3| = \left| \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^3 \right| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right|^3 = \left(\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right| \right)^3 = \left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|} \right)^3$$

$$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} \right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

Exercice17 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; les points A, B et C

ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Solution : il suffit de montrer que : $AC = AB = BC$

$$AB = |z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + \sqrt{3}i - 2| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i| = |2| = 2$$

Donc : $AC = AB = BC$

Exercice18 : Déterminer l'ensemble (Δ) des

points M d'affixe z tels que : $|z-1-2i| = |z-7+2i|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|z-1-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow |z-(1+2i)| = |z-(7-2i)|$$

On pose : $A(z_A = 1+2i)$ et $B(z_B = 7-2i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$|z-1-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow |x+yi-1-2i| = |x+yi-7+2i|$$

$$\Leftrightarrow |x-1+i(y-2)| = |x-7+i(y+2)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 12x - 8y - 48 = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : 3x - 2y - 12 = 0$$

Exercice19: Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|z-3+i| = 5$

$$b) |z-4-5i| = |z+2|$$

Solution :

a) Soit A le point d'affixe $3-i$

$$|z-3+i| = 5 \Leftrightarrow AM = 5$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 5.

b) Soient B et C les points d'affixes $4+5i$ et -2

$$|z-4-5i| = |z+2| \Leftrightarrow BM = CM$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[BC]$

Exercice20 : Déterminer l'ensemble (C) des points

M d'affixe z tels que : $|z-2i| = 3$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|z-2i| = 3 \text{ On pose : } A(z_A = 2i)$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

$A(0;2)$ et de rayon : $R=3$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$|z-2i| = 3 \Leftrightarrow |x+yi-2i| = 3 \Leftrightarrow |x+i(y-2)| = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

$A(0;2)$ et de rayon : $R=3$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (Δ) des

points M d'affixe z tels que : $|iz + 3| = \left| \frac{1}{i} z - 4i + 1 \right|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|iz + 3| = \left| \frac{1}{i} z - 4i + 1 \right| \Leftrightarrow |i(z - 3i)| = \left| \frac{1}{i}(z + 4 + i) \right|$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| = |z + 4 + i| \text{ car } |i| = \left| \frac{1}{i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| = |z - (-4 - i)|$$

On pose : $A(z_A = 3i)$ et $B(z_B = -4 - i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du

segment $[AB]$

Exercice22 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$;

on considère les points A ; B ; C ; D ; E ; F qui ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = -2i$ et $z_C = 2 + 2i$ et

$z_D = 3i$ et $z_E = -3$ et $z_F = -2 + 2i$

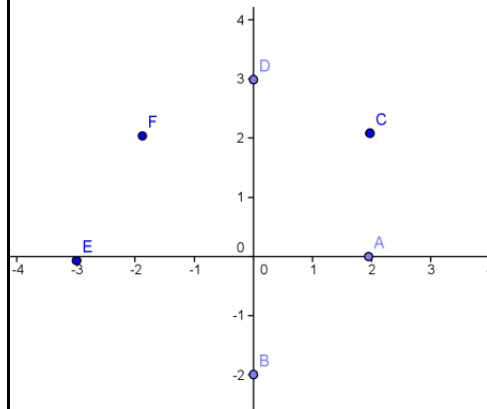
1) Représenter les points A ; B ; C ; D ; E ; F dans Le plan complexe

2) on utilisant la représentations déterminer

l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et z_D et

z_E et z_F

Solution :1)



$$2) \arg z_A = 0[2\pi] \text{ et } \arg z_B = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\arg z_C = \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ et } \arg z_D = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\arg z_E = \pi[2\pi] \text{ et } \arg z_F = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

Exercice23 : Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

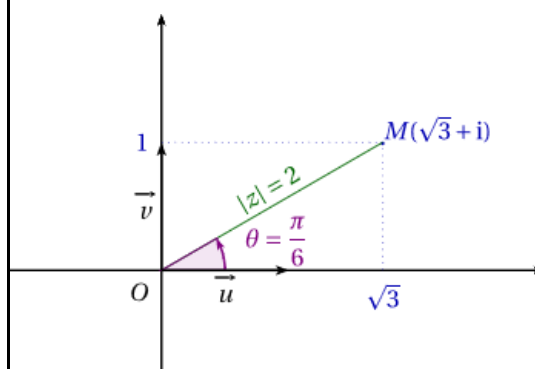
$$1) z_1 = \sqrt{3} + i \quad 2) z_2 = 1 - i \quad 3) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

$$4) z_3 = -1 - \sqrt{3}i \quad 5) z = 7 \quad 6) z = -12$$

$$\text{Solution :1)} |z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_1 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$



$$2) |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Et on a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ donc :

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \quad \arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$3) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i \quad |z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Et on a : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc :

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$4) z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$$z_4 = 2 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right)$$

Exercice24: Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec

$$\theta \in]-\pi; \pi[- \{0\}$$

$$1) z_1 = \sin \theta + i \cos \theta \quad 2) z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$$

$$3) z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Solution : 1)

$$z_1 = \sin \theta + i \cos \theta = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right)$$

Donc : c'est forme trigonométrique du nombre

complexe z_1 donc $|z_1| = 1$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$

$$2) z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

• Si $\theta \in]0; \pi[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre

complexe z_2 est :

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta - \pi}{2} [2\pi]$$

• Si $\theta \in]-\pi; 0[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi + \theta}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + \theta}{2} \right) \right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre

complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta + \pi}{2} [2\pi]$$

$$3) z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$z_3 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

• Si $\theta \in]0; \pi[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre

complexe z_3 est : $z_3 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

$$|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

• Si $\theta \in]-\pi; 0[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \pi + \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

Exercice 25 : on considère les nombres

complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et

$$U = z_1^6 \times z_2^2$$

1) Ecrivez les nombres complexes z_1 ; z_2 et Z et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z Sous sa forme algébrique

puis en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Solution : 1) $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Donc : } \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

On a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

$$\text{Donc : } z_1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]$$

$$\text{On a : } |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$U = z_1^6 \times z_2^2 = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]^6 \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$U = \left[2^6; -\pi \right] \times \left[2; -\frac{\pi}{2} \right] = \left[2^7; -\pi + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$U = 2^7 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right) = 2^7 (0 + 1i) = 2^7 i$$

2)

$$Z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i - i + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 26 : Ecrire le complexe $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8$

Sous sa forme algébrique

$$\text{Solution : On va d'abord écrire } u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Sous la forme trigonométrique

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{Donc : } Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8 = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{3} \right]^8$$

$$Z = \left[\sqrt{2}^8; \frac{8\pi}{3} \right] = 16 \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \frac{6\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi + 2\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Z = -8 + 8\sqrt{3}i$$

Exercice 27 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

$$1) z = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad 2) z = -5 - 5i \quad 3) z = -6 + 6\sqrt{3}i$$

$$4) z = (3 - 3i)^4 \quad 5) z = -2 - 2\sqrt{3}i \quad 6) z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$$

$$7) z = (\sqrt{3} + 3i) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad 8) z = \frac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$$

$$9) z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$$

Exercice28 : Déterminer les racines carrées de

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{Solution :}$$

$$\text{On a : } |z| = 1 \text{ et } \arg z \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

Donc les racines carrées de z sont :

$$u_1 = \left[1; \frac{\pi}{12} \right] = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \text{ et } u_2 = -u_1$$

Exercice29 : Soit le complexe :

$$u = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2

2) En déduire la forme trigonométrique de u

Exercice30 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A = 3 + 5i$,

$$z_B = 3 - 5i \text{ et } z_C = 7 + 3i$$

1)montrer que : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

2)monter que ABC est un triangle rectangle et que : $BC = 2AC$

$$\text{Solution :1)} \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4 - 8i}{-4 + 2i} = \frac{2i(-4 + 2i)}{-4 + 2i} = 2i$$

$$\arg(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) [2\pi]$$

$$\arg(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \arg(2i) [2\pi]$$

$$\arg(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc : ABC est un triangle rectangle en C

$$\text{On a : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i \text{ donc: } \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = |2i|$$

$$\text{Donc : } \frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2 \text{ donc: } \frac{BC}{AC} = 2$$

Donc : $BC = 2AC$

Exercice31 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a = 2i$, $b = \sqrt{2}(1+i)$ et

$$c = a + b$$

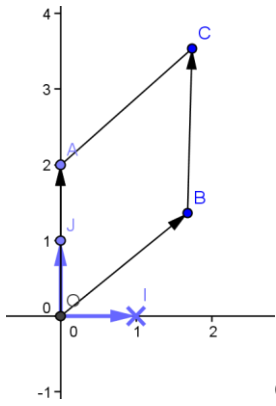
1)Montrer que OBCA est un losange

2) Montrer que : $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$

Solution :

$$1)\text{On a : } c = a + b \text{ donc : } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Donc OBCA est un parallélogramme



on a : $|a - 0| = |2i| = 2 = OA$

$OB = |b - 0| = |\sqrt{2}(1+i)| = |\sqrt{2}|(1+i)| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$

alors : $OB = OA$

donc OBCA est un losange

2) $\arg c \equiv (\vec{i}; \overrightarrow{OC})[2\pi]$

$\equiv (\vec{i}; \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})[2\pi]$

$\equiv (\vec{i}; \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})[2\pi]$ (OBCA : losange)

$\equiv \arg b + \frac{1}{2} \arg \frac{a}{b}[2\pi]$

$\equiv \arg b + \frac{1}{2}(\arg a - \arg b)[2\pi]$

Donc : $\arg c \equiv \frac{1}{2}(\arg a + \arg b)[2\pi]$

Or : $a = 2i$ donc : $\arg a \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Et : $b = \sqrt{2}(1+i) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$b = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg b \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\arg c \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

Donc : $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Exercice32 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a = 2 + i$,

$b = 3 + 2i$ et $c = 5 - i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Calculer $\tan \alpha$

Solution : On a : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

Donc : $\alpha = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$

Donc : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{26}}{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

Donc : $\sqrt{26} \cos \alpha = 1$ et $\sqrt{26} \sin \alpha = -5$

Donc : $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ et $\sin \alpha = \frac{-5}{\sqrt{26}}$

Donc : $\tan \alpha = -5$

Exercice33 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points

A, B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 + i$

et $z_3 = 1 - i$

1) Placer dans le repère \mathcal{R} les points A, B et C

2) Déterminer le module et l'argument du nombre

complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ et déterminer une mesure de

l'angle $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment [BC] et en déduire que :

$(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme

algébrique puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice34 : 1° Vérifier que les points $A(5+3i)$; $B(2+i)$ et $C(-1-i)$ sont alignés

2° Est ce que les points $M(-2+2i)$, $N(2-i)$ et $N(1-i)$ sont alignés ?

Exercice35 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$$Z = \frac{5z - 2}{z - 1} \text{ Soit un imaginaire pur.}$$

Solution : Pour répondre à cette question, on peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle.

Il faut que $z \neq 1$. On note $A(1)$

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$Z = \frac{5z - 2}{z - 1} = \frac{5x - 2 + 5iy}{x - 1 + iy} = \frac{(5x - 2 + 5iy)(x - 1 - iy)}{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2 - 5x - 2x + 2 + 5y^2) + i(-5xy + 2y + 5xy - 5y)}{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2 - 7x + 2 + 5y^2) - 3iy}{(x - 1)^2 + y^2}$$

Z est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2 + 5y^2 - 7x + 2}{(x - 1)^2 + y^2} = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 - 7x + 2 = 0 \\ x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 - \frac{49}{100} + \frac{2}{5} = 0$$

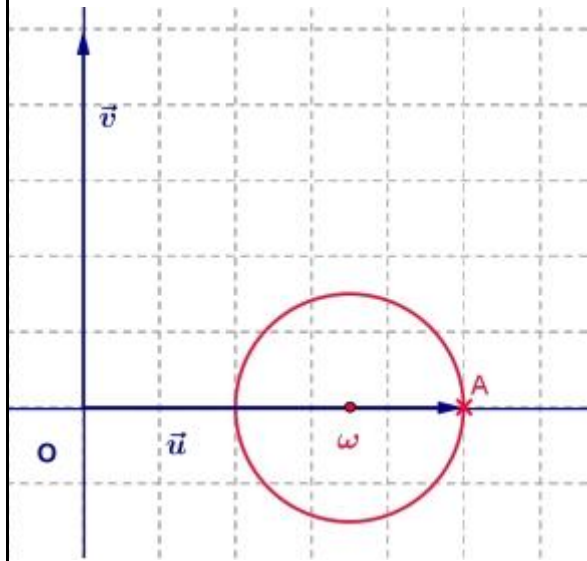
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

$\omega\left(\frac{7}{10} + 0i\right)$ et de rayon $\frac{3}{10}$.

Le point $A(1)$ appartient à (C).

L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé de A.



Exercices36 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

$$\text{que : } \left| \frac{z - 2}{z + 1 - i} \right| = 1$$

Solution :

Première méthode (méthode algébrique)

$z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

On doit avoir : $z \neq -1 + i$

$$z - 2 = x - 2 + yi$$

$$z + 1 - i = x + 1 + i(y - 1)$$

$$\left| \frac{z - 2}{z + 1 - i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z - 2|}{|z + 1 - i|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - 2| = |z + 1 - i|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation

$$y = 3x - 1$$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

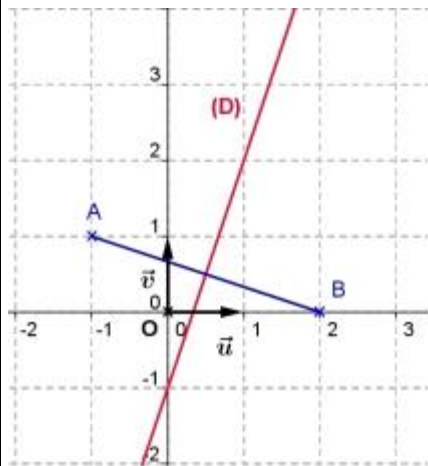
On pose : A(-1+i) et B(2) et M(z)

$$\overrightarrow{AM}(z+1-i) \text{ donc } |z+1-i| = AM$$

$$\overrightarrow{BM}(z-2) \text{ donc } |z-2| = BM$$

$$\frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].



Exercice37 : soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$ et $a \neq c$ et $b \neq c$

$$1) \text{ Montrer que : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ en déduire que : } \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \frac{1}{2} \arg \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Solution : } \overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}} \right)^2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

$$\text{On a si : } |z|=1 \text{ alors : } \bar{z} = \frac{1}{z} \text{ donc :}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{1}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{b-c}{a-c} \right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{1}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ puisque : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R} \text{ alors :}$$

$$\arg \left(\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \right) \equiv 0[\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 + \arg \left(\frac{a}{b} \right) \equiv 0[\pi]$$

$$\text{Donc : } 2 \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv -\arg \left(\frac{a}{b} \right) [\pi]$$

$$\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \frac{1}{2} \arg \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien



Bon courage