Résumé de Cours sur les nombres complexes(partie1)

PROF : ATMANI NAJIB — 2ème BAC Sciences maths

NOMBRES COMPLEXES(1)

A)L'ensemble $\mathbb{C}$; définition et vocabulaire

il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ ses éléments s'appelles des nombres complexes qui vérifie : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$ et tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b réels

Le réel a s'appelle la partie réel de z ; on écrit : $\boldsymbol{a = Re(z)}$

Le réel $\boldsymbol{b}$ s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{b = Im(z)}$ et L'écriture : $\boldsymbol{z = a + ib}$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe $\boldsymbol{z}$.

1)Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x';y') \in \mathbb{R}^2$

deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow x = x' et y = y'$

2) L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

3) l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$

$(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$ et $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$

4) L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ; $\boldsymbol{i\mathbb{R} = \{iy / y \in \mathbb{R}\}}$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$

5) $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ ($\subsetneq$: inclus strictement)

6) L'addition dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est : Associative et Commutative et 0 est l'élément neutre et Chaque élément z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'opposé de z noté $(-z)$

7) multiplication dans $\mathbb{C}$ est : Associative et Commutative et 1 est l'élément neutre et Chaque élément z non nul z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'inverse de z noté : ($\frac{1}{z}$ ou z^{-1}) $z \times \frac{1}{z} = 1$

8)On general les calculs dans $\mathbb{C}$ s'éffectuent de meme facon que sur $\mathbb{R}$ seulement on remplace i^2 par -1 et on a :

a) $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

b) $z^0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$($z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n\,fois}$)

c) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ d) $z^{n+m} = z^n \times z^m$ 5) $z^{n-m} = z^n / z^m$

e) $\left(z^n\right)^m = z^{n\times m}$

f) $z^n - z_1^n = \left(z - z_1\right)\left(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \ldots + z^1 z_1^{n-2} + z_1^{n-1}\right)$

g) Si $z \neq 1$ alors : $S = 1 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

somme des termes d'une suite géométrique

9) $\left(z + z_1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z_1^{n-k}$ formule de binôme

Lorsque Im(z) = 0, z = a est réel.

Lorsque Re(z) = 0, z = ib est appelé imaginaire pur.

B)L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe :

Le plans $(\mathcal{P})$ est muni du repère orthonormé $\mathscr{R}\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ soit $\mathcal{V}_2$ le plan vectoriel associé à $(\mathcal{P})$.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan $(\mathcal{P})$.

1) Le point $M(a, b)$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$

2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point $\boldsymbol{M}$

on écrit : $z = aff(M)$ et on écrit : $z_M = a + ib$

3) Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$ et Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur $\vec{u}$ on écrit : $z = aff(\vec{u})$ on écrit : $z_{\vec{u}} = a + ib$

7) Le plan $(\mathcal{P})$ s'appelle un plan complexe

a)L'axe $\left(O;\vec{u}\right)$ s'appelle l'axe des réels

b) L'axe $\left(O;\vec{v}\right)$ s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathscr{R}\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

8)Les complexes z = a ∈ R sont des nombres réels et sont représentés sur sur l'axe des Réels.

9)Les complexes z = ib, b ∈ R sont des imaginaires purs et sont représentés l'axe des imaginaires purs.

10) Les opérations sur les affixes.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_2$;

M et N deux points dans le plan $(\mathcal{P})$ et α un réel ; On a :

1) $aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$ et $aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

2) $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$

3) $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$

4) $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

5) Soient $[AB]$ un segment de milieu I ; on a : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

6) pour 2 points pondérés : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$ pour 3 points pondérés :

$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ on a : $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

7)Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

C) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1)Soient x et y deux réels et z = x+iy. Le conjugué du nombre z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par : $\bar{z} = x - iy$.

et les images de z et $\bar{z}$ sontsymétriques par rapport à l'axe des réels.

2) $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

a)si $z = x + iy$ alors $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

b) $\bar{\bar{z}} = z$ c) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ d) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

e) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ f) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

g) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ h) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

k) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$ l) $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$

m) $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\bar{z}\right)^n$ $n \in \mathbb{Z}$ n) $\overline{z} = \lambda \bar{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

D) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1)Soit z = x+iy un nombre complexe avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ s'appelle le module du nombre complexe z

2) Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

1) $|\bar{z}| = |-z| = |z|$ 2) $|z|^2 = z\bar{z}$ 3) $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

4) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ 5) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

6) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0$

7) $|z^n| = |z|^n$ si $z \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ 8) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

8)si M est l'image du nombre complexe z alors $|z| = OM$

9Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors :

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$

E) forme trigonométriqe et argument d'un complexe

1)Le plan complexe est menu d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ et $z \in \mathbb{C}^*$ et $M(z)$ son image. L' argument du nombre complexe $\boldsymbol{z}$ une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ On le note par $\boldsymbol{arg(z)}$

2) $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

a) $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$ b) $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$

c) $\arg(iy) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \succ 0$ et $\arg(iy) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \prec 0$

d) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$ e) $\arg \bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$

3) Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $z = |z|(cos\theta + i\ sin\theta)$ Où $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul $\boldsymbol{z}$

4) $z \in \mathbb{C}^*$ Si on a $z = \mathrm{r}(cos\theta + i\ sin\theta)$ avec $r \succ 0$

Alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ on écrit : $z = [r, \theta]$

5)Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

b) $\arg\ (z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$

c) $\arg\ (1/z) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $1/\ [r, \theta] = [1/r, -\theta]$

d) $\arg\ (z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

et on a : $[r, \theta]\ /\ [r', \theta'] = [r/r', \theta - \theta']$

e) $\arg(z^n) \equiv n\ \arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$

f) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$ et on a : $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$

g) $\arg\ (\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $\overline{[r;\theta]} = [r, -\theta]$

F)Les formes trigonométriques des racines carrées .

1)On appelle racine carrée d'un complexe $\boldsymbol{z}$ tout complexe u tel que $u^2 = z$

2)Un complexe non nul admet deux racines carrées.

3) Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul ; les racines carrées de $[r, \theta]$ sont les complexes : $u_1 = \left[\sqrt{r}; \dfrac{\theta}{2}\right]$ et et $u_2 = -u_1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Bon courage