

**Exercices : fonctions exponentielles**

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC SM

**TD :FONCTIONS EXPONENTIELLES**

**Exercice1 :** Résoudre les équations

Et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$1) \exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad 2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

**Exercice2 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{ll} 1) e^{1-x} \times e^{2x} = e & 2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \\ 3) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 & 4) e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7} \\ 5) e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0 & \end{array}$$

**Exercice3 :** Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} & 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}} \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} \end{array}$$

**Exercice4 :** Déterminer les dérivées des fonctions

suivantes : 1)  $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

$$2) g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1} \quad 3) h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$$

$$4) f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

**Exercice5 :** Déterminer les primitives des

fonctions suivantes : 1)  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$$2) g(x) = (e^x)^2 \quad 3) h(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$$

**Exercice6 :** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$1) I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$$

$$2) I = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$3) I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$4) I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$5) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I = ]0; +\infty[$$

**Exercice7 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (x-1)e^x$$

- 1) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 2) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$
- 3) Etudier la concavité de la courbe  $C_f$
- 4) Construire la courbe  $C_f$ .

**Exercice8 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$

- 1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$
- 2) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 3) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$
- 4) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$  Et étudier la position de la courbe  $C_f$  avec les asymptotes obliques

**Exercice9 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

- 1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$   
Au voisinage de  $+\infty$

7) calculer :  $f(2\ln 2)$  et construire la courbe  $C_f$ .

**Exercice 10 :** Considérons la fonction  $f$  définie

par :  $f(x) = \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}$

1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe  $C_f$ .

**Exercice 11 :** Considérons la fonction  $f$  définie

par :  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3) montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera

4) déterminer :  $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

**Exercice 12 :** Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$  et soit  $(C)$  la courbe

De  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec

$$\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$$

1)a) montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2)a) vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$

b) en déduire la droite  $(D)$  d'équation :  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

c) étudier la position de la courbe  $C_f$  avec la droite  $(D)$

3)a) montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$

b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de  $C_f$

d) montrer que la courbe  $C_f$  coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe  $C_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5) a) montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera

b) déterminer :  $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

**Exercice 13 :**

Partie 1 : Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$

par :  $f(x) = (x + 2)e^{-\frac{x}{2}}$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en  $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

5) a) Montrer que  $(\forall t > 0) 0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que :  $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

- c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$   
 6) Construire la courbe  $C_f$ .

Partie 2 :

Considérons la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f_n(x) = (x+2n)e^{-\frac{2}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

Où  $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f_n$  à droite de 0.

b) Déterminer la limite en  $+\infty$

- c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f_n$

puis dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

- 2) Montrer que l'équation  $f_n(x) = \frac{2}{n}$

admet une solution unique  $\alpha_n$  dans  $]0, +\infty[$

- 3)a) Montrer que  $(\forall x > 0)$

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

- b) En déduire la monotonie de  $(\alpha_n)_n$

- c) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_n$  est convergente et

que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)_n = 0$

**Exercice14 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$1) 5^x = 15 \quad 2) 3^{2x} \geq 5^{1-x} \quad 3) 7^{x+1} - 7^{-x} < 6$$

**Exercice15 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$1) 2^{x+1} = 8^x \quad 2) 3^x = 12 \quad 3) 5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$$

$$4) 100^x + 40 = 14 \times 10^x$$

$$5) 2^{x-1} > 4^x \quad 5) (0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$$

**Exercice16:** Déterminer les primitives de la fonction suivante :  $f(x) = 3^{x-2}$

**Exercice17:** Soit La fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1} \quad 1) \text{déterminer } D_f$$

2) calculer les limites aux bornes de  $D_f$

3)Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$

5) construire la courbe  $C_f$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

**Exercice 18:** Soit La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^x, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1)Etudier la continuité de la fonction  $f$  à droite de 0.

2)Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0.

3)Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4)Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

5)Tracer la courbe  $C_f$ .

6)Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = x$

7)Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{e}$

et  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$ .

a)Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$

b)Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_n$  ; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_n$

**Exercice 19 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; considérons la fonction  $f_n$  définie sur  $[1, +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

et  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Donner le tableau de variation de  $f_1$ .

2. Déterminer l'équation de la tangente  $(T_1)$  à la courbe  $(C_1)$  en point d'abscisse 1.

3. Construire la courbe  $(C_1)$  et la tangente  $(T_1)$  dans le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_n$ .

5. a) Etudier sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  le signe de :

$$f_2(x) - f_1(x)$$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ; puis construire  $(C_2)$

6. Considérons la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  où  $u_n$  est la valeur maximale de la fonction  $f_n$ .

a) Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{n}{2e} \right)^n$

b) Pour  $x \in ]1, +\infty[$  ; calculer  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}}))$

d) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_n \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^n})$

Et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### **Exercice20 : Partie 1**

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction :  $t \rightarrow e^{-t}$  ;

montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) (\exists \theta \in \mathbb{R}^{*+}) (e^\theta = \frac{x}{1-e^{-x}})$

2. En déduire que :  $(\forall x > 0) (1-x < e^{-x})$  et que

$$(\forall x > 0) (1+x < e^x)$$

3. En déduire que :  $(\forall x > 0) (0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) < x)$

### Partie 2

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$

Par :  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1}$  Si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$

1) Etudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

2) Déterminer la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et étudier la branche infinie de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

3) a) Montrer que  $(\forall x > 0)$

$$\left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} + x - 1 < \frac{x^2}{2} \right)$$

b) Montrer que  $(\forall x > 0) \left( \frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \cdot f(x) \right)$

c) En déduire que  $f$  est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

4) a) Montrer que :  $(\forall x > 0) (f'(x) = \frac{e^x(e^x-x-1)}{(e^x-1)^2})$

b) En déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Construire la courbe  $C_f$ .

d) Montrer que  $f$  est une bijection de  $[0, +\infty[$  Vers  $J = f([0, +\infty[)$ .

Partie 3 : Considérons la suite  $(u_n)_n$  définie par :

$$u_0 \in ]0, +\infty[ \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) (u_{n+1} = \ln(f(u_n))).$$

1) Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est strictement positive,

2) Montrer que la suite  $(u_n)_n$  strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que l'équation  $\ln(f(x)) = x$  admet 0 comme seule solution.

b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

