

FONCTIONS EXPONENTIELLES

JUIN 2004

(I) soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

- 1) calculer les limites de f aux bornes de \mathbb{R}^*
- 2) étudier le sens de variation de f
- 3) a) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
b) tracer la courbe (C_f)

(II) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n^2 f(U_n) = U_n e^{-U_n}$

- 1) prouver que $(\forall x > 0) : e^x \geq x + 1$
- 2) en déduire que $(\forall x > 0) : x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$
- 3) a) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \frac{1}{n+1}$
b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite
- 4) on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$ pour tout entier n de \mathbb{N}^* .
a) prouver que $V_n = \ln\left(\frac{1}{U_n}\right)$
b) déterminer la limite de la suite $(V_n)_n$

JUIN 2005

(I) on considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- 1) a) montrer que f est continue à droite de 0
b) étudier la dérivableté de f à droite de 0
c) montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- 2) a) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b) montrer que $(\forall t \geq 0) : 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$
c) montrer que $(\forall x > 0) : -\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$
d) déduire la branche infinie de (C_f) en $+\infty$
- 3) tracer la courbe (C_f)

FONCTIONS EXPONENTIELLES

(II) soit n un entier naturel non nul .

on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{\frac{-x}{n}} & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) montrer que f_n est dérivable à droite de 0
- 2) étudier le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$
- 3) a) montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une unique solution a_n dans $]0, +\infty[$
b) montrer que $(\forall x > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x) - \frac{2}{x+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$
c) en déduire que $(a_n)_n$ est décroissante puis qu'elle est convergente . on pose $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
d) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$ et prouver que $a = 0$

JUILLET 2006

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .

On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

- 1) a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
b) étudier les branches infinies de la courbe (C_n)
- 2) calculer la dérivée $f'_n(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction f_n
- 3) a) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une seule solution α_n
b) montrer que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$
c) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x \geq x + 1$ en déduire que $f_n(1) > 0$
d) montrer que $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$
- 4) tracer la courbe (C_2) (on donne $\alpha_2 \approx 0,6$)
- 5) a) montrer que $(\forall n \geq 2) f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$
b) en déduire que $(\forall n \geq 2) : f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$
c) montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

FONCTIONS EXPONENTIELLES

6) a) montrer que $(\forall n \geq 2) : \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

b) en déduire que $(\forall n \geq 2) : \frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < 2 \frac{\ln(n)}{n}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

JUIN 2010

(I) on considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$

1) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau des variations

3) déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe (C_f) en 0 et tracer (C_f)

(II) soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

1) a) montrer que $(\forall x > 1) e^{-x^2} < e^{-x}$

b) en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

2) étudier le sens de variation de f_n puis dresser le tableau des variations

3) montrer que : $(\exists! u_n \in]0, 1[) f_n(u_n) = 1$

4) a) vérifier que $(\forall n \geq 2) f_{n+1}(u_n) = u_n$

b) montrer que $(u_n)_n$ est croissante et convergente

5) on pose $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

a) montrer que $0 \leq l \leq 1$

b) montrer que $(\forall n \geq 2) -\frac{\ln 4}{n} < u_n < \frac{1 - \ln 4}{n}$ en déduire la valeur de l

JUIN 2012

Soit n un entier naturel non nul . on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$

2) a) étudier la branche infinie de la courbe (C_n) au voisinage de $-\infty$

b) montrer que la droite $(D) y = x$ est une asymptote oblique à (C_n) en $+\infty$, déterminer la position de (C_n) par rapport à (D)

FONCTIONS EXPONENTIELLES

- 3) étudier le sens de variation de f_n puis donner le tableau des variations
- 4) tracer la courbe (C_3) (on donne $f_3(-1,5) \approx 0$; $f_3(-0,6) \approx 0$; $\ln 3 \approx 1,1$)
- 5) a) montrer que si $n \geq 3$ alors $\frac{e}{n} < \ln n$
 b) montrer que si $n \geq 3$ alors $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n
 telles que $x_n \leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$
 c) calculer les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$
- 6) soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = -1 - x \ln x$; $x > 0$ et $g(0) = -1$
- a) montrer que g est continue à droite de 0
 b) vérifier que $(\forall n \geq 3)$ $g\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$

- 1) a) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ que peut-on déduire ?
 b) étudier les variations de f puis dresser le tableau des variations
- 2) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
- 3) a) montrer que $(\forall x \in [0,1])$ $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$
 b) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 4) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
- a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$
 b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$
 c) en déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite