

FONCTIONS EXPONENTIELLES

JUIN 2004

(I) soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

- 1) calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $\mathbb{R}^*$
- 2) étudier le sens de variation de  $f$
- 3) a) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$   
b) tracer la courbe  $(C_f)$

(II) soit  $(U_n)_n$  la suite définie par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = U_n^2 f(U_n) = U_n e^{-U_n}$

- 1) prouver que  $(\forall x > 0) : e^x \geq x + 1$
- 2) en déduire que  $(\forall x > 0) : x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$
- 3) a) montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \frac{1}{n+1}$   
b) montrer que  $(U_n)_n$  est convergente et déterminer sa limite
- 4) on pose  $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$  pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .  
a) prouver que  $V_n = \ln\left(\frac{1}{U_n}\right)$   
b) déterminer la limite de la suite  $(V_n)_n$

JUIN 2005

(I) on considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que  $f$  est continue à droite de 0  
b) étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 0  
c) montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$
- 2) a) calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
b) montrer que  $(\forall t \geq 0) : 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$   
c) montrer que  $(\forall x > 0) : -\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$   
d) déduire la branche infinie de  $(C_f)$  en  $+\infty$
- 3) tracer la courbe  $(C_f)$

FONCTIONS EXPONENTIELLES

(II) soit  $n$  un entier naturel non nul .

on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) montrer que  $f_n$  est dérivable à droite de 0
- 2) étudier le sens de variation de  $f_n$  sur  $[0, +\infty[$
- 3) a) montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  l'équation  $f_n(x) = \frac{2}{n}$  admet une unique solution

$a_n$  dans  $]0, +\infty[$

- b) montrer que  $(\forall x > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x) - \frac{2}{x+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$
- c) en déduire que  $(a_n)_n$  est décroissante puis qu'elle est convergente . on pose  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
- d) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$  et prouver que  $a = 0$

JUILLET 2006

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

- 1) a) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- b) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_n)$
- 2) calculer la dérivée  $f'_n(x)$  puis dresser le tableau des variations de la fonction  $f_n$
- 3) a) montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une seule solution  $\alpha_n$
- b) montrer que  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$
- c) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x \geq x + 1$  en déduire que  $f_n(1) > 0$
- d) montrer que  $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$
- 4) tracer la courbe  $(C_2)$  (on donne  $\alpha_2 \approx 0,6$ )
- 5) a) montrer que  $(\forall n \geq 2) f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$
- b) en déduire que  $(\forall n \geq 2) : f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$
- c) montrer que la suite  $(\alpha_n)_n$  est décroissante et qu'elle est convergente

FONCTIONS EXPONENTIELLES

- 6) a) montrer que  $(\forall n \geq 2) : \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$   
 b) en déduire que  $(\forall n \geq 2) : \frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < 2 \frac{\ln(n)}{n}$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

JUIN 2010

(I) on considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = 4xe^{-x^2}$

- 1) calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 2) étudier le sens de variation de  $f$  puis dresser le tableau des variations  
 3) déterminer l'équation du demi-tangente à la courbe  $(C_f)$  en 0 et tracer  $(C_f)$

(II) soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = 4x^n e^{-x^2}$

- 1) a) montrer que  $(\forall x > 1) e^{-x^2} < e^{-x}$   
 b) en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$   
 2) étudier le sens de variation de  $f_n$  puis dresser le tableau des variations  
 3) montrer que :  $(\exists! u_n \in ]0, 1[) f_n(u_n) = 1$   
 4) a) vérifier que  $(\forall n \geq 2) f_{n+1}(u_n) = u_n$   
 b) montrer que  $(u_n)_n$  est croissante et convergente  
 5) on pose  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$   
 a) montrer que  $0 \leq l \leq 1$   
 b) montrer que  $(\forall n \geq 2) -\frac{\ln 4}{n} < u_n < \frac{1 - \ln 4}{n}$  en déduire la valeur de  $l$

JUIN 2012

Soit  $n$  un entier naturel non nul . on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

- 1) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$   
 2) a) étudier la branche infinie de la courbe  $(C_n)$  au voisinage de  $-\infty$   
 b) montrer que la droite  $(D) y = x$  est une asymptote oblique à  $(C_n)$  en  $+\infty$  , déterminer la position de  $(C_n)$  par rapport à  $(D)$

FONCTIONS EXPONENTIELLES

- 3) étudier le sens de variation de  $f_n$  puis donner le tableau des variations
- 4) tracer la courbe  $(C_3)$  ( on donne  $f_3(-1,5) \approx 0$  ;  $f_3(-0,6) \approx 0$  ;  $\ln 3 \approx 1,1$  )
- 5) a) montrer que si  $n \geq 3$  alors  $\frac{e}{n} < \ln n$   
 b) montrer que si  $n \geq 3$  alors  $f_n(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $x_n$  et  $y_n$  telles que  $x_n \leq -\ln n$  et  $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$   
 c) calculer les limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$
- 6) soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = -1 - x \ln x$  ;  $x > 0$  et  $g(0) = -1$   
 a) montrer que  $g$  est continue à droite de 0  
 b) vérifier que  $(\forall n \geq 3) \quad g\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$  en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

EXERCICE

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$

- 1) a) calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  que put-on déduire ?  
 b) étudier les variations de  $f$  puis dresser le tableau des variations
- 2) montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution  $\alpha$  et que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
- 3) a) montrer que  $(\forall x \in [0, 1]) \quad 0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$   
 b) en déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 4) soit  $(U_n)_n$  la suite définie par :  $U_0 = \frac{1}{2}$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$   
 a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$   
 b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$   
 c) en déduire que  $(U_n)_n$  est convergente et déterminer sa limite