

**Exercices d'applications et de réflexions : FONCTIONS LOGARITHMIQUES**

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC SM BIOF

## **TD -FONCTIONS LOGARITHMIQUES**

**Exercice1 :** déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1)  $f : x \rightarrow \ln(x+1)$     2)  $g : x \rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2)$

3)  $h : x \rightarrow \frac{x}{\ln x}$     4)  $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$

5)  $m : x \rightarrow \ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

**Exercice2 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1)  $\ln(x-2) = 0$   
 2)  $\ln(3x-1) = \ln(5x-10)$     3)  $\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$   
 4)  $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$     5)  $\ln(2x-6) \geq 0$

6)  $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

**Exercice3 :** On pose  $\ln(2) \approx 0,7$  et  $\ln(3) \approx 1,1$

Calculer:  $\ln(6)$  ;  $\ln(4)$  ;  $\ln(8)$  ;  $\ln(72)$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right); \ln\left(\frac{3}{2}\right); \ln(\sqrt{2}); \ln(\sqrt{6}); \ln(3\sqrt{2})$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}); A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27} \quad \text{et} \quad C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$$

**Exercice4 :** On pose  $\alpha = \ln(a)$  et  $\beta = \ln(b)$   
Calculer en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  les réels suivants :

$$\ln(a^2b^5) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}$$

**Exercice5 :** simplifier et calculer :

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$$

**Exercice6 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1)  $\ln(2x-1) = \frac{3}{2}$     2)  $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

3)  $3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$     4)  $\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$

5)  $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

6)  $\ln(2x+5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$

7)  $\ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$

**Exercice7 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système suivant :

$$\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

**Exercice8 :** déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1)  $f : x \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)}$     2)  $g : x \rightarrow \sqrt{1 - \ln(e-x)}$

3)  $h : x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$

**Exercice9 :** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$     2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x)$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$     4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right)$     6)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x$     8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

9)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln(x))^2$  on pose :  $X = \sqrt{x}$

10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x - 1}$     11)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5$

**Exercice 10 :** Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 5)$$

**Exercice 11 :** calculer la dérivée des fonctions définies par : 1)  $f(x) = x^2 - \ln x$  2)  $f(x) = x \ln x$

3)  $f(x) = \ln(1 + x^2)$

**Exercice 12 :** calculer la dérivée de la fonction définie sur  $I = ]-2; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3 + 8}}{(x^2 + 1)^3}$

**Exercice 13 :** Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \ln|\ln|x||$

2)  $f(x) = \ln|\sin^2 x + 3\sin x + 4|$

**Exercice 14 :** Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1)  $I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$     2)  $I = ]0; 1[; g(x) = \frac{1}{x \ln x}$

3)  $I = ]-\infty; 1[; h(x) = \frac{1}{x-1}$     4)  $I = \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

5)  $M(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  (Essayer d'écrire

$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$  où  $a$  et  $b$  des réels à déterminer).

6)  $N(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x-3}$

7)  $I = ]3; +\infty[; q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$

**Exercice 15 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$(\forall x \in D); f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

2) En déduire la fonction primitive de  $f$  sur  $]-\infty; -2[$  Tel que  $F(-3) = \ln 2$

**Exercice 16 :** simplifier et calculer :

1)  $\log_8 4$     2)  $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$     3)  $\log_{\sqrt{3}} 9$

4)  $A = \log_2 \left( \frac{1}{5} \right) + \log_2 (10) + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt[5]{3})$

**Exercice 17 :** On pose  $\alpha = \log_{40} (100)$  et

$\beta = \log_{16} (25)$  Calculer  $\beta$  en fonction  $\alpha$

**Exercice 18 :** simplifier et calculer :

1)  $\log_{10} 100$     2)  $\log_{10} 0,0001$

3)  $A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$

**Exercice 19 :** déterminer le plus petit entier

naturel  $n$  tel que :  $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20}$

**Exercice 20 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

1)  $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$

2)  $2(\log x)^2 - 19\log x - 10 = 0$

3)  $\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1$

4)  $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$

Où  $\log$  est le logarithme décimal

**Exercice 21 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations et équations suivantes :

1)  $\log_3(7x-1)^2 = 0$     2)  $\log_3(5x+1) = 2$

3)  $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$

**Exercice 22:** A) soit la fonction  $g$  définie

par :  $g(x) = x - \ln x$

1) Déterminer  $D_g$  l'ensemble de définition de la fonction  $g$  et déterminer les limites aux bornes

de  $D_g$

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$   
puis dresser le tableau de variation de  $g$

3) en déduire que :  $\forall x > 0 \quad x > \ln x$

B) soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1) Montrer que  $D_f = [0; +\infty[$

2) Montrer que  $f$  est continue à droite de 0

3) calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivableté de la fonction  $f$  à droite de 0

5) Montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de  $f$

7) déterminer les points d'intersections de  $C_f$  et la

Droite :  $(\Delta)$  :  $y = 1$

8) Montrer que :  $C_f$  coupe l'axe des abscisses

en un point d'abscisse dans  $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9) Construire la courbe  $C_f$  dans un repère

$(O; \vec{i}, \vec{j})$  ( $\ln 2 \approx 0,7$  ,  $e \approx 2,7$ )

**Exercice 23 :** Considérons les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \text{ et } g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

1)a) calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$$

b) montrer que :  $\forall x \in ]-1; +\infty[$  on a :

$$g(x) = (1+x) \left( \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

et en déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

c) Etudier les variations les fonctions  $f$  et  $g$   
Puis dresser les tableaux de variations de  $f$  et  $g$

2) en déduire que  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$3) \text{ calculer : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

4) monter que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

**Exercice 24 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$

2) montrer que le domaine d'étude de  $f$  est :

$$D_E = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

3) Déterminer les limites aux bornes de  $D_E$

4) Etudier les variations de  $f$  sur  $D_E$

5) Etudier les branches infinies de  $(C_f)$

la courbe de  $f$

6). Construire la courbe  $(C_f)$  dans  $D_E$

**Exercice 25 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\log_x(x+1) = \log_{x+1}(x)$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :

$$\log_2(x) > \log_x(2)$$

**Exercice 26 :** Considérons la fonction  $f$  définie  
par :  $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$

2) Résoudre l'équation  $f(x) = 1$

3) Résoudre l'inéquation  $f(x) \leq 1$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à gauche de  $e$

5) Etudier les variations de  $f$  et en déduire que  $f$  est une bijection de  $D_f$  vers un intervalle  $J$ .

6) Construire dans le même repère  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$

**Exercice 27 :** Considérons la fonction  $g$  définie

par :  $g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$

2. a) Montrer que la fonction  $g$  admet un prolongement par continuité en 0 noté  $\tilde{g}$

b) Etudier la dérivabilité de  $\tilde{g}$  en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. Déterminer les limites de la fonction  $g$  en  $+\infty$  et en  $-1$  à gauche.

4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$  puis dresser le tableau de variation de  $g$

5. Etudier les branches infinies de la courbe  $C_g$ .

6. Construire la courbe  $C_g$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et

exercices Que l'on devient un mathématicien

